KTH Matematik

Kontrollskrivning 1
5B1118 Diskret Matematik

24 Mars, 2006

- tid:**8:15-9:00**
- Inga böker/anteckningar får användas.
- **Allt ska motiveras.** Ett svar utan förklaring är värd 0 poäng!
- Minst 3 poäng krävs för godkänt.

(1) (3 p.) Visa att $2^n \geq n^2$, för varje heltal $n \geq 4$.

- $n = 4 : 2^4 = 16 \geq 4^2 = 16$.
- Antag att $2^k \geq k^2$ och därför $2^{k+1} \geq 2k^2$. Om $2^{k+1} < (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ då är $2k^2 < k^2 + 2k + 1$, d.v.s

$$k^2 - 2k - 1 = k(k-2) - 1 < 0$$

Detta gäller inte för $k \geq 4$.

(2) (3 p.) Hitta en heltalslösning (x, y) till ekvationen:

$$221x + 455y = 91.$$

Eftersom är $(221, 455) = 13$ ser man att:

$$13 = 455 - 2 \cdot 221.$$

$(-14, 7)$ är en lösning.

(3) (3 p.) Låt $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara funktionen definierad av $\phi(n, m) = nm$.

(a) Låt p vara ett primtal. Bestäm mängden

$$X_p = \{(n, m) \text{ sådan att } \phi(n, m) = p\}.$$

Eftersom är p ett primtal har det bara 1 och p som delare. Det följer att $X_p = \{(1, p), (p, 1)\}$.

(b) Är ϕ injektiv? Nej. Till exempel ser man att $\phi(2,3) = \phi(1,6)$.

(c) Är ϕ surjektiv? Ja. Varje positivt heltal $n \in \mathbb{N}$ kan representeras som $n = 1 \cdot n = \phi(1, n)$.