Ekvivalenselationer, partitioner

Mars 31 2006

Ekvivalensrelation

Låt A vara en mängd.

$$A \times A = \{(a, b), a, b \in A\}$$

Definition

En **relation** $\mathcal{R}$ på A är en delmängd $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.
Vi betecknar $(a, b) \in \mathcal{R}$ som $a\mathcal{R}b$ och vi säger att *a står i relation till b.*

Definition

En ekvivalensrelation på A är en relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ som är:

1. *reflexiv*: $a\mathcal{R}a$ för alla $a \in A$ $((a, a) \in \mathcal{R})$;
2. *symmetrisk*: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ $((a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R})$;
3. *transitiv* $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ $((a, b), (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R})$.

Om $a\mathcal{R}b$ då säger vi att *a är ekvivalent till b.*

Definition

Låt $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation på A. Ekvivalensklassen av ett element $a \in A$ defineras som

$$[a] = \{b \in A, b\mathcal{R}a\} \subseteq A.$$

Anmärkning

1. $x, y \in [a] \Rightarrow x\mathcal{R}y$;
2. $x \in [a] \Rightarrow [x] = [a]$,
3. $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y]$
4. antingen är $[x] = [y]$ eller är $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Ekvivalensklass

Exempel

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$
$x\mathcal{R}y$ *om* $5/x - y$.

- $\mathcal{R}$ *är en ekvivalensrelation.*
- $[1] = \{1, 6, 11, 16, ..., 1 + 5n, ...\}$,
  $[2] = \{2, 7, 12, ..., 2 + 5n, ...\}$,
  $[3] = \{3, 13, ..., 3 + 5n, ...\}$, $[4] = \{4 + 5n\}$, $[5] = \{5n\}$
- $\mathbb{N} = [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4] \cup [5]$, *och* $\{[1], [2], [3], [4], [5]\}$ *utgör en partition på* $\mathbb{N}$.

Ekvivalensklass

SATS

För varje ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på A utgör ekvivalensklasserna en partition av A.

Definition

Vi säger att $\{A_1, ..., A_k, ...\}$ utgör e partition av en mängd A om

1. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup ... = A$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq i$.

Definition

$$S(n, k) = \text{ antalet partitioner av } n \text{ element i } k \text{ klasser.}$$

De heter **Stirling numbers**.

Partitioner

Exempel

- $S(n,1) = 1$
- $S(n,n) = 1$

SATS

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k).$$

Man kan samla dem i en triangel:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1
\end{array}$$

Partitioner

Låt A vara en mängd med n elemnt, $|A| = n$, och $\{A_1, \ldots, A_k\}$ vara en partition av A där $|A_i| = n_i$.
Då är $n_1 + \ldots + n_k = n$ och vi säger att

$$[n_1, \ldots, n_k] \text{ är en partition av } n.$$

Exempel

Partitionerna av 6 är :

- $[6]$
- $[5, 1]$
- $[4, 1, 1] := [4, 1^2], [4, 2]$
- $[3, 1^3], [3, 1, 2], [3^2]$
- $[2, 1^4], [2^2, 1^2], [2^3]$
- $[1^6]$.

Permutationer

Definition

Varje uppställning av n olika objekt i någon ordning kallas en **permutation** av dessa.
Aternativt kan man säga att en **permutation** på n är en bijektiv funktion $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.

Mängden av permutationer på n betecknas med $\mathcal{S}_n$. Observera att $|\mathcal{S}_n| = n!$

$$\sigma : \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Vi kommer att beteckna $\sigma \in \mathcal{S}_7, \sigma = [7654321]$.

Permutationer

Om $\sigma = [7654321], \tau = [3241657]$ definerar vi:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \tau\sigma : & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & = [7561423] \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$\tau^{-1} = \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{array} = [4213657]$$

Anmärkning

- $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$ och därför kan $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.
- $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = [1234567...n] = id_{\mathbb{N}_n} := id_n$.
- $Id_n\sigma = \sigma id_n = \sigma$.

Permutationen: $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5 \to 1$ kallas en **cyckel** och betcknas med: (13245) Varje permutation kan skrivas som en produkt av cycklar:

$$[4213657] = (143)(2)(56)(7).$$

Permutationer

Att fördela en permutation av n är ekvivalent med att ge en partition av n element.
Vi säger att $[4213657] = (143)(2)(56)(7)$ är av typ $[1^2, 2, 3]$.

Exempel

Hur många permutationer av typ $[1^2, 2, 3]$, *finns i* $\mathcal{S}_7$*?*

Vi ska arranger $1, 2, 3..., 7$ som

$$(\cdot)(\cdot)(\cdot\cdot)(\cdot\cdot\cdot).$$

- $(147) = (471) = (714)$
- $(143)(2)(56)(7) = (143)(7)(56)(2)$

$$\text{Svar: } \frac{7!}{3\cdot 2\cdot 2}.$$

Permutationer

Anmärkning

Antalet permutationer av typ $[1^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, ..., n^{\alpha_n}]$ är

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdot \ldots \cdot n^{\alpha_n}\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!}$$

Exempel

Antalet permutationer av typ $[3, 2, 1^5]$ *i* $\mathcal{S}_{10}$ *är*

$$\frac{10!}{2\cdot 3\cdot 5!} = 5040$$

Definition

Låt $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_n$. Vi säger att de är konjugerat om det finns $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sådan att

$$\sigma \alpha \sigma^{-1} = \beta.$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"] & x_2 \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & \cdots & x_n \arrow[d, "\sigma"] \\
y_1 \arrow[r, "\beta"] & y_2 \arrow[r] & \cdots & y_n
\end{tikzcd}$$

SATS

Två permutationer är konjugerat om och endast om de är av samma typ.