Funktioner och kombinatoriska tillämpningar

Mars 29 2006

Multinomialkoefficienterna

Vi ska införa en generalisering av binomialkoefficienterna.

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

där $n_1 + \ldots + n_k = n$.
detta beräknar antalet arrangemang av n_1 stycken likadana objekt, $A_1, \ldots, A_1$, n_2 stycken likadana objekt, $A_2, \ldots, A_2 \ldots$ n_k stycken likadana objekt, $A_k, \ldots, A_k$.

Exempel

$$\binom{11}{5, 2, 2, 1, 1} = \frac{11!}{5!4} = 83160.$$

Detta beräknar antalet arrangemang av bokstäverna i ordet ABRACADABRA.

Multinomialkoefficienterna

SATS

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+\dots+n_k=n, n_i \geq 0} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}.$$

Exempel

Bestäm koefficienten an $x^5y^3z^2$ *i* $(x+y+z)^{10}$.

Svar: $\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5!3!2!} = 2520$.

Urval utan hänsyn till ordning, med upprepning.

Problem: Från n olika objekt ska man välja ut r stycken, utan hänsyn till ordning och med upprepning tillåten.
Säg att vi väljer objekt nr i x_i gånger, där $x_i \geq 0$.

$$x_1 + ... + x_n = r.$$

Problemet är ekvivalent med att bestämma antalet heltalslösningar $(x_1, ..., x_n)$ till ekvationen.

SATS

Antalet icke-negativa heltalslösningar $(x_1, ..., x_n)$ *till ekvationen* $x_1 + ... + x_n = r$ *är:*

$$\binom{n+r-1}{r.}$$

Urval utan hänsyn till ordning, med upprepning.

Exempel

Bestäm antalet heltalslösningar till:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

sådan att $x_1, x_2 \geq 5$ *och* $x_3, x_4 \geq 7$.

Låt $y_1 = x_1 - 5, y_2 = x_2 - 5, y_3 = x_1 - 7, y_4 = x_4 - 7$. Vi ser att

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (10 + 14) = 8$$

Vi ska hitta alla icke-negativa heltalslösningar till

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 8$$

Svaret är $\binom{8+4-1}{8} = 165$.

Sammanfattning

	urval med upprepning	urval utan upprepning
urval med hänsyn till ordning	n^r	$\frac{n!}{(n-r)!}$
urval utan hänsyn till ordning	$\binom{n+r-1}{r}$	$\binom{n}{r}$

Sieve principle

Vi har sett att: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Påliknande sätt kan man visa att:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|) + |A \cap B \cap C|.$$

SATS

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = \alpha_1 - \alpha_2 + \ldots + (-1)^{k-1}\alpha_k$$

där

- $\alpha_1 = |A_1| + \ldots + |A_k|$
- $\alpha_2 = \sum |A_i \cap A_j|$
- $\alpha_3 = \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$
- $\ldots$
- $\alpha_k = |A_1 \cap \ldots \cap A_k|$.

Sieve principle

Exempel

Bestäm antalet permutationer av alfabets 28 bokstäver (A-Ö) som innehåller något av mönstren

HASP, FIL, TÅNG, SPIK.

Sätt:

- A_1 vara mängden av permutationer som innehåller HASP.
- A_2 vara mängden av permutationer som innehåller FIL.
- A_3 vara mängden av permutationer som innehåller TÅNG.
- A_4 vara mängden av permutationer som innehåller SPIK.

Sieve principle

Vi ska bestämma $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Man ser att:
$|A_1| = 25!, |A_2| = 26!, |A_3| = 25!, |A_6| = 25!$
$|A_1 \cap A_2| = 23!, |A_1 \cap A_3| = 22!, |A_1 \cap A_4| =$
$23!$ (ska innehhålla HASPIK , $|A_2 \cap A_3| = 23!, |A_2 \cap A_4| =$
$0, |A_3 \cap A_4| = 22!$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 20! = |A_1 \cap A_3 \cap A_4|, |A_1 \cap A_2 \cap A_4| =$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0.$

Svar: $26! + 3 \cdot 25! - (3 \cdot 23! + 2 \cdot 22!) + 2 \cdot 20!$

Exempel

Bestäm altalet heltal mellan 1 *och* 1000 *som inte är delbara med* 2, 3 *och* 5.

Sätt $U = \{1, ..., 1000\}$ och

- $A_1 = \{n \in U, 2|n\}$, $|A_1| = 500$.
- $A_2 = \{n \in U, 3|n\}$, $|A_2| = 333$.
- $A_3 = \{n \in U, 5|n\}$, $|A_1| = 200$.

Vi ska bstämma

$$|\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3)}| = 1000 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Man ser att: $|A_1 \cap A_2| = (1000/6) = 166, |A_1 \cap A_3| = 100, |A_2 \cap A_3| = 66, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 33.$

Svar: $1000 - (500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33) = 266.$