Funktioner och kombinatoriska tillämpningar

Mars 28 2006

Urval med hänsyn till ordning.

$$|A_1 \times \dots \times A_k| = |A_1||A_2|\dots|A_k|$$

Vi vill välja ut r objekt från n stycken olika och vi tillåter upprepning. Det betyder att varje objekt kan väljas mer än en gång .

Vid varje val har vi r alternativ, så det finns

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^r$$

olika utfall. Om vi vill välja ut r objekt från n stycken objekt, UTAN UPPREPNING då minskar antalet alternativ med 1 i varje steg och antalet möjligheter blir:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Med fakultetsbetekning:

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Urval med hänsyn till ordning.

Exempel

Bestämma antalet möjliga arrengemang av bokstäverna i ANTANANARIVE.

- Antalet bokstäver=12 (hade de varit olika skulle svaret ha varit 12!).
- Det finns 4 stycken A (varje permutation av de ger samma arrangemang)och 3 stycken N.

$$\text{Svaret: } \frac{12!}{3!4!}.$$

Urval med hänsyn till ordning.

Exempel

Bestämma antalet möjliga arrengemang av bokstäverna i ANTANANARIVE där alla A står intill varandra.

- Behandla alla fyra AAAA som EN enhet !
- Boksäver som ska arrangeras är

$$N\,N\,N\,T\,R\,I\,V\,E\,(AAAA)$$

$$\text{Svaret: } \frac{9!}{3!}.$$

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Ett urval där ingen hänsyn tas till ordningen och där upprepning inte är tillåten kan uppfattas som ett val av r objekt (bland n) samtidigt och inte ett och ett.
Antalet sätt att välja r objekt från n utan hänsyn till ordning och utan upprepning är

$$\frac{n!}{(n-r)!r!} := \binom{n}{r}.$$

som heter en **binomialkoefficient**.

Exempel

$\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n.$

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Exempel

En student skall, vid en tentamen, besvara 7 av 10 givna frågor. Antar att frågorna är uppdelade i två grupper av 5 och att minst 3 frågor från den första gruppen skall besvaras. På hür många sätt kan studenten välja ut dessa?

Stdenten kan välja:

1. EXAKT 3 frågor från den första gruppen: $\binom{5}{3}\binom{5}{4} = 50$.
2. EXAKT 4 frågor från den första gruppen: $\binom{5}{4}\binom{5}{3}$.
3. EXAKT 5 frågor från den första gruppen: $\binom{5}{5}\binom{5}{2} = 10$.

Vi ska ta summan av dessa möjligheter.

Svar: 110.

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Exempel

Hur kan man dela in 36 personer i 4 lika stora grupper?

$$\text{Svar: } \binom{36}{9}\binom{27}{9}\binom{18}{9}\binom{9}{9} = \frac{36!}{9!9!9!9!}.$$

Det motsvarar antalet arrangemang av de 36 bokstäverna:

$$AAA...ABBB...BCCC...CDDD...D$$

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Anmärkning

Låt A vara en mämgd och $|A| = n$. Antalet delmängder $B \subset A$ med $|B| = r$ är lika men $\binom{n}{r}$.

Exempel

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Exempel

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}.$$

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Vi använder ordet " binomial koefficient" på grund av den följande:

SATS

Det gäller att för $n \geq 1$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Exempel

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 =$$

$$= x^3 + 3x^3 y + 3xy^2 + y^3.$$

Urval utan hänsyn till ordning, utan upprepning.

Exempel

Bestäm den kostanta termen i

$$(2t^4 + \frac{1}{t})^{10}$$

Enligt binomialsatsen är:

$$(2t^4 + \frac{1}{t})^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (2t^4)^{10-k} \cdot \frac{1}{t^k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} 2^{10-k} t^{40-5k}$$

Det följer att kostanta termen är $\binom{10}{8} 2^2 = 45 \cdot 4 = 180.$

Den viktigaste egenskapen hos binomialkoefficienterna är:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

Man kan samla alla binomialkoefficienterna i på en triangel som heter Pascals triangel:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$