Funktioner och kombinatoriska tillämpningar

Mars 27 2006

Lådprincip

Om $kn + 1$ eller fler kulor skall läggas i n lådor då måste någon låda innehålla minst $k + 1$ kulor.

Exempel

I en liksidig triangel med sidan 1 *väljes* 5 *punkter. Visa att det finns två punkter vars avståndet är högst* $\frac{1}{2}$.

- *Figuren delas i fyra delar (deltrianglar).*
- *två av de fem punkterna måste tillhöra samma deltriangel.*

Exempel

Visa att det, bland 6 *personer, alltid finns antingen* 3 *som känner varandra eller* 3 *stycken som inte känner varandra.*

Multiplications primcipen

$$|A_1 \times ... \times A_k| = |A_1||A_2|...|A_k|$$

Vi vill välja ut r objekt från n olika stycken och vi tillåter upprepning. Det betyder att varje objekt kan väljas mer än en gång .

Vid varje val har vi r alternativ, så det finns

$$n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^r$$

olika utfall. Om vi vill välja ut r objekt från n stycken objekt, UTAN UPPREPNING då minskar antalet alternativ med 1 i varje steg och antalet möjligheter blir:

$$n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1).$$

Multiplications primcipen

Exempel

Ett vanligt svenskt bilnummer består av tre bokstäver mellan A och Z, inklusive W, men utan I, Q och V, följt av tre siffror. Hur många bilnummer kan man konstruera enligt denna specifikation?

Låt $B = \{$ bokstäver mellan A och Z, inklusive W, men utan I, Q och $V\}$ och $A = \{0 \leq n \leq 9\}$. Så är $|A| = 10$ och $|B| = 26 - 3 = 23$. En bilnummer är ett element i $B \times B \times B \times A \times A \times A$. Så det finns $10^3 \cdot 23^3$ många bilnummer som man kan konstruera enligt denna specifikation.

Multiplications primcipen

Exempel

Bestäm antalet 6 *siffriga jämna heltal om ingen siffra förekommer mer än engång .*

Sista siffran av ett jämnt heltal måste vara jämn.

1. Första siffran kan väljas bland $1, ..., 9$.
2. De följande 4 siffrorna ska väljas blan $0, ..., 9$.
3. Sista siffran kan väljas bara bland $0, 2, 4, 6, 8$.

Multiplications primcipen

Vi delar sådana 6 siffriga heltal i två grupper:

1. heltal som slutar med 0
2. heltal där sista siffran är skild från 0.

Enligt multiplikations principen finns det $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$ element i första gruppen.
För att beräkna antalet element i andra gruppen börjar vi på sista siffran (där vi har 4 olika alternativ). Så det finns $4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 53760$ många alternativ.
Totalt har vi $53760 + 15120$ alternativ.

Mängden av funktioner

Låt $|A| = m, |B| = n$. Definera mängden av funktioner

$$F(A, B) = \{f : A \to B\}$$

Då är

$$|F(A, B)| = \prod_{a \in A} n = n^m$$

Man ser att en funktion $f : A \to B$ är entydigt bestämt av

$$(f(a_1), ..., f(a_m)), A = \{a_1, ..., a_m\}$$

och $(f(a_1), ..., f(a_m)) \in B \times B \times ... \times B$ m gånger.

Exempel

Exempel

Visa att om $A = m$ då finns det exakt 2^m delmängder till A.

En delmängd $B \subseteq A$ can beskrivas som en funktion:

$$f_B : A \to \{1, 2\}$$

$$f_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad a \in B \\ 2 & \text{om} \quad a \notin B \end{cases}$$

Så kan man säga att:

$$\text{antalet delmängder till } a = \text{ antalet funktioner } A \to \{1, 2\} = 2^m.$$

Injektiva funktioner

Antalet injektiva funktioner från A till B är lika med:

$$n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Exempel

1. *Antalet injektiva funktioner från* $\{1, 2, .., n\}$ *till* $\{1, 2, .., n\}$ *är lika med* $n(n-1)...(2) \cdot 1$.
2. *Om en funktion från* $\{1, 2, .., n\}$ *till* $\{1, 2, .., n\}$ *är injektiv då är den BIJEKTIV.*
3. *antalet bijektiva functioner* $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$ *är lika med:*

$$n(n-1)...(2) \cdot 1 := n!$$

vi sätter $0! = 1$.

Permutationer

Definition

Varje uppställning av n olika objekt i någon ordning kallas en **permutation** av dessa.
Aternativt kan man säga att en **permutation** på n är en bijektiv funktion $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$.

Mängden av permutationer på n betecknas med $\mathcal{S}_n$. Observera att $|\mathcal{S}_n| = n!$

$$\sigma : \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Vi kommer att beteckna $\sigma \in \mathcal{S}_7, \sigma = [7654321]$.

Permutationer

Anmärkning

- $\mathcal{S}_3 = \{[123], [132], [213], [231], [312], [321]\}$.
- $n! = n \cdot (n-1)!$.
- $id = id_{\mathbb{N}_n} = [123...n]$.

Permutationer

Om $\sigma = [7654321], \tau = [3241657]$ definerar vi:

$$
\begin{array}{rccccccccl}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\tau\sigma: & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & = & [7561423] \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 2 & 1 & &
\end{array}
$$

$$
\tau^{-1} = \begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7
\end{array} = [4213657]
$$

Permutationer

Anmärkning

- $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$ och därför kan $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.
- $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = [1234567 \ldots n] = id_{\mathbb{N}_n} := id_n$.
- $Id_n\sigma = \sigma id_n = \sigma$.

Permutationen: $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5 \to 1$ kallas en **cyckel** och betcknas med: (13245) Varje permutation kan skrivas som en produkt av cyklar:

$$[4213657] = (143)(2)(56)(7).$$