Mängder och kombinatoriska tillämpningar

K.T.H. Matmetaik

Mars 24 2006

Komplement till en mängd

Definition

Betrakta två mängder: $A \subset U$. Vi definierar **komplementet** till A, i U, som:

$$\overline{A} = \{x \in U \text{ sådan att } x \notin A\}.$$

Anmärkning

- $|\overline{A}| = |U| - |A|$;
- Låt A, B vara två mängder. Det gäller att:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Vi säger att A, B är **disjunkta** om $A \cap B = \emptyset$.

Generaliserad lådprincipen

Anmärkning

Låt $A_i, \ldots, A_k$ vara disjunkta mängder. Det gäller att:

$$|A_i \cup \ldots \cup A_k| = |A_1| + \ldots + |A_k|.$$

Antag att ni har m stycken kulor att lägga i n lådor. Om $m \geq nr$ då måste någon låda innehålla $r + 1$ kulor.

Exempel

Visa att det, bland 6 personer, alltid finns antingen 3 som känner varandra eller 3 stycken som inte känner varandra.

Delmängder av $A \times B$.

Låt S vara en delmängd av $A \times B$:

$$S \subseteq A \times B = \{(a, b) \text{ där } a \in A, b \in B\}.$$

Låt $x \in A, y \in B$ sätt:

$$R_x(S) = \{(x, b) \in S \text{ där } b \in B\}, C_y(S) = \{(a, y) \in S \text{ där } a \in A\}.$$

Låt $r_x(S) = |R_x|, c_y(S) = |C_y|$.

Anmärkning

$$|S| = \sum_{x \in A} r_x(S) = \sum_{y \in B} c_y(S).$$

Exempelvis är

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Exempel

Det finns 60 studenter registrerade p den här kursen. Efter de 5 kontrollsnivningarna har jag registrerat era resultat och ser att:

- 60 studenter kom till $KS1$.
- 40 studenter kom till $KS2$.
- 40 studenter kom till $KS3$.
- 30 studenter kom till $KS4$.
- 45 studenter kom till $KS5$.

I början an kursen förväntade jag mig att varje student skulle skriva minst 4 kontrollskrivningar. Stämmer det?

Eulers ϕ funktionen

Definition
Låt $n \in \mathbb{N}$.

$$\phi(n) = \{x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq n \text{ sådat att } (x, n) = 1\}.$$

Det betyder att $\phi(n)$ är lika med antalet heltal mellan 1 och n som är relativt prima till n.

- $\phi(1) = 1, \phi(2) = 1, \phi(3) = 2, \phi(4) = 2, \phi(5) = 4, \ldots$
- $\phi(p) = p - 1$ för alla primtal p.

SATS

$$\sum_{d/n} \phi(d) = n.$$

Bevis

Heltalet n är bestämt.

1. $$S = \{(d, f) \text{ där } d/n, 1 \leq f \leq d, (f, d) = 1\} \subset \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}.$$

   Vi ser att $R_d(S) = \{1 \leq f \leq d, (f, d) = 1\}$ och då är $r_d(S) = \phi(d)$. Det följer att:

   $$|S| = \sum_{d/n} \phi(d).$$

2. Betrakta funktionen:

   $$f : S \rightarrow \{1, 2, ..., n\}, f((d, f)) = \frac{fn}{d}.$$

   Den är Bijektiv!

3. Det säger att:

   $$\sum_{d/n} \phi(d) = |S| = |\{1, ..., n\}| = n.$$