Funktioner och kombinatoriska tillämpningar

Mars 22 2006

Funktion

Definition

Låt A, B vara två mängder. En **funktion** f frå n A till B:

$$f : A \to B$$

är en regel som till **varje** $a \in A$ ordnar ett entydig ellement $b = f(a) \in B$.

Elementet b kallas funktionens värde i a, eller *bilden* av a.

Exempel

- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 4n + 5$.
- $f(n) = \sqrt{n}$ *är INTE en funktion* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.
- $f(n) = \pm n$ *är INTE en funktion.*
- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(n) = n^2$.

Terminologi

Låt $f : A \to B$ vara en funktion.

- A: funktionsmängd (domain)
- $V_f = \{b \in B, b = f(a) \text{ för något } a \in A\} \subseteq B$ **värdemängden** (image).
- Vi säger att $f_1, f_2 : A \to B$ är **lika** om $f_1(a) = f_2(a)$ för varje $a \in A$.

Exempel

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 4n + 5$. $V_f = \{9, 13, 17, 21, ...\} \subset \mathbb{N}$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$. $V_f = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition

En funktion $f : A \to B$ kallas:

- **injektiv** om ekvationen $f(x) = y$ har högst en lösning $x \in A$. D.v.s.
$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$
- **surjektiv** om ekvationen $f(x) = y$ har minst en lösning $x \in A$. D.v.s.
$$V_f = B.$$
- **bijektiv** om ekvationen $f(x) = y$ har precis en lösning $x \in A$. D.v.s.
BIJEKTIV=INJEKTIV+SURJEKTIV.

Exempler

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = 2n$ är injektiv men inte surjektiv.
2. $id_A : A \to A, id_A(a) = a$ för alla $a \in A$, är bijektiv.

Definition

Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara funktioner. Den **sammansatta funktionen**

$$g \circ f : A \to C$$

definieras av $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Exempel

1. *för varje* $f : A \to B$ *är*

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}, f(n) = n^2$, *och* $g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{Z}, g(n) = -n$.
   $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, g \circ f(n) = -n^2$.

Anmärkning

1. f, g injektiva $\Rightarrow g \circ f$ injektiv;
2. f, g surjektiva $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv;
3. f, g bijektiva $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv.

Definition

Låt $f : A \rightarrow B$ vara en fuktion. En funktion $g : B \rightarrow A$ kallas en **invers** av f om:

$$g \circ f = id_A, f \circ g = id_B.$$

En funktion som har en invers kallas **inverterbar**.
Man kan visa att en invers till en funktion är *entydigt bestämd.*

Invers

Anmärkning

- Om g är inversen till f då gäller att:

$$g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

- En funktion f har en invers $\Leftrightarrow$ f är bijektiv.
  Om $f : A \rightarrow B$ är bijektiv då ekvationen $f(x) = y$ har en entydig lösning $x \in A$. Funktionen $f^{-1} : B \rightarrow A$ som till varje $y \in B$ ordnas den entyget lösningen av $f(x) = y$ är den **inversa funktionen**
- $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ bijektiva $\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Några kombinatoriska tillämpningar

Definition

Vi säger att en mängd A är en **ändlig** mängd om det finns $n \in \mathbb{N}$ sådan att $|A| = n$. När så inte är fallet säger vi att A är en oändlig mängd.

Man ser att om $f : A \to B$ är bijektiv då motsvarar varje element i A precis ett element i B. Det kommer att betyda att A och B har samma antalet element :

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \text{ det finns en bijektiv funktion } f : A \to B.$$

Anmärkning

1. $\mathbb{N}$ är oändlig.
2. Det finns oändliga många primtal.
3. det finns en bijektiv funktion $A \to \mathbb{N} \Rightarrow A$ oändlig .

Lådprincipen

Om A har ändligt många element, $|A| = n$. Att fixa en ordning på A, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, betyder att fixa en bijektiv funktion:

$$f : A \to \{1, 2.3, ..., n\} := \mathbb{N}_n, f(i) = a_i \in A.$$

Anmärkning

Låt A, B vara ändliga mängder.

1. $f : A \to B$ injektiv $\Rightarrow |A| \leq |B|$;
2. $f : A \to B$ surjektiv $\Rightarrow |A| \geq |B|$.

Lådprincipen.
Om $n + 1$ eller fler kulor skall läggas i n lådor då måste någon låda innehålla två kulor.
Om $kn + 1$ eller fler kulor skall läggas i n lådor då måste någon låda innehålla minst $k + 1$ kulor.

Tillämpnigar

Exempel

Visa att i varje mängd av människor finns det två element med samma antalet vänner.
Låt $X = \{p_1, ..., p_n\}, n \geq 2$ *och antag att* p_i *är vänn med* p_j *om och endast om* p_j *är vänn med* p_i.
Definiera en funktion:

$$f : X \to \{0, 1, 2, ..., n-1\}, f(p_i) = \text{antalet vänner av } p_i (\text{utan } p_i) \text{ i } X.$$

Observera att:

- $0, n-1$ *kan inte båda vara element i* V_f.
- $f : X \to \{1, 2, ..., n-1\}(\{0, 1, ..., n-2\})$.
- *Enligt lådpricipen finss det* p_j, p_i *sådan att* $f(p_i) = f(p_j)$ *(*f *kan inte vara injektiv).*

Exempel

I en liksidig triangel med sidan 1 *väljes* 5 *punkter. Visa att det finns två punkter vars avståndet är högst* $\frac{1}{2}$.

- *Figuren delas i fyra del (deltrianglar).*
- *två av de fem punkterna måste tillhöra samma deltriangel.*