"God *really* created the natural numbers ($\mathbb{N}$), the rest is the work of man"

Mars 21 2006

Delbarhet

Definition

Låt $x, y \in \mathbb{Z}$. Vi säger att x är **multipel** av y, eller att y **delar** x om det finns $r \in \mathbb{Z}$ sådan att

$$x = r \cdot y.$$

Anmärkning

- $\pm 1/x, \pm x/x$ för varje $x \in \mathbb{Z}$.
- $x/0$ för varje $x \in \mathbb{Z}$.

Man skriver y/x när y delar x och $y \not/ x$ när så inte är fallet.

Divisionsalgoritmen

SATS

Låt $a, b \in \mathbb{Z}, b \geq 0$. *Då finns heltal* q, r *sådan att:*

$$a = bq + r, 0 \leq r < b.$$

Dessa tal är dessutom entydigt bestämda.

a: dividend

b: divisor

q: kvot

r: rest.

Representation i bas t.

Låt t vara ett heltal (fixat). För varje heltal x har vi :

$$
\begin{array}{rcll}
x & = & tq_0 + r_0 & 0 \leq r_1 < t \\
q_0 & = & tq_1 + r_1 & 0 \leq r_1 < t \\
q_1 & = & tq_2 + r_2 & 0 \leq r_2 < t \\
\ldots & & \ldots & \\
q_{n-1} & = & 0t + r_n & 0 \leq r_n < t
\end{array}
$$

Därefter räknar vi baklänges:

$$x = r_n t^n + r_{n-1} t^{n-1} + \ldots + r_1 t + r_0$$

Vi skrivet $x = (r_n r_{n-1} \ldots r_1 r_0)_t$ *i bas t.*

Exempler

1. $(1101011)_2 = 2^6 + ... + 1 = 107.$
2.

$$\begin{array}{lcrcr} 777 & = & 8 \cdot 97 & + & 1 \\ 97 & = & 8 \cdot 12 & + & 1 \\ 12 & = & 8 \cdot 1 & + & 4 \\ 1 & = & 8 \cdot 0 & + & 1 \end{array}$$

Så är $777 = 8(8(8+4)+1)+1 = 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 8 + 8^0$

$$777 = (1411)_8$$

Största gemensam delare

Låt $n \in \mathbb{Z}$. Betrakta den följande delmängd av $\mathbb{Z}$:

$$D_n = \{x \in \mathbb{Z} \text{ sådan att } x/n\}$$

Enligt definitionen är $D_n \cap D_m$ mängden av alla gemensamma delare till m och n.

Observera att

- $D_n \cap D_m \neq \emptyset$
- $D_n \cap D_m$ har ett storsta element.

Detta kallar vi den största gemensamma delaren.

Största gemensam delare

Definition

Låt $0 \neq a, b \in \mathbb{Z}$. Det positiva heltalet d kallas *den största gemensamma delaren* till a och b, och den brukar betecknas med $d = gcd(a, b) = (a, b)$ om

1. d/a och d/b;
2. c/a och $c/b \Rightarrow c/d$;

Om $(a, b) = 1$ då säger vi att a och b är **relativt prima.**

Ett systematisk sätt för att hitta (a, b) (som ingår i de flesta dataprogram) är den divisionsalgoritm.

Euklides algoritm

Exempel

Bestäm $(252, 111)$.

$$\begin{array}{rcc} 252 & = & 2 \cdot 111 + 30 \\ 111 & = & 3 \cdot 30 + 21 \\ 30 & = & 1 \cdot 21 + 9 \\ 21 & = & 2 \cdot 9 + \underline{3} \\ 9 & = & 3 \cdot 3 \end{array}$$

$(252, 111) = 3$.

Eftersom:

$a = bq + r \Rightarrow (a, b) = (b, r)$.

SATS

Om d är den storsta gemensamma delaren till heltalen a och b ($d = (a, b)$) så finns heltal $x, y \in \mathbb{Z}$ sådan att:

$$d = xa + yb.$$

Exempel

a, b relativt prima $\Rightarrow$ finns det heltal x, y sådan att $ax + by = 1$

$$(29, 35) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 35 &= 29 + 6 \\ 29 &= 4 \cdot 6 + 5 \\ 6 &= 5 + 1 \end{aligned}$$

$$1 = 6 - 5 = 6 - 29 + 4 \cdot 6 = -29 + 5 \cdot (35 - 29) = 5 \cdot 35 - 6 \cdot 29.$$

Diofantiska ekvationer

En akvation i variablerna x, y av formen $ax + by = d$ där $a, b, d \in \mathbb{Z}$ kallas en **diofantisk ekvation.**

Anmärkning

$ax + by = d$ har en lösning $\Leftrightarrow (a, b)/d$

Exempel

Hitta en lösning till den diofantiska ekvationen:

$$145x + 175y = 10000.$$

$(145, 175) = 5/10000$ då finns det en lösning:

1. Dividera ekvationen med 5: $29x + 35y = 2000$
2. hitta $(29, 35) = 1$. Då finns det x, y sådan att $29x + 35x = 1$, $y = 5, x = -6$.
3. Multiplicera med 2000: $2000 = -12000 \cdot 29 + 10000 \cdot 35$ Här avläser vi lösningen $(x, y) = (-12000, 10000)$.

Primtal

Definition

Ett heltal $p \geq 2$ kallas att **primtal** om det bara har 1 och p som delare.

Exempel

$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$

SATS (ARITMETIKENS FUNDAMENTAL SATS)

Varje heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal. Framställningen är entydig bortsett från ordning.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k.$$

Anmärkning

Låt p vara ett primtal. Då gäller att:

$$p/x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k \Rightarrow p/x_i \text{ för något } i.$$