"God *really* created the natural numbers ($\mathbb{N}$), the rest is the work of man"

Mars 17 2006

Ekvivalensrelation

Låt A vara en mängd.

$$A \times A = \{(a, b), a, b \in A\}$$

Definition

En **relation** $\mathcal{R}$ på A är en delmängd $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.
Vi betecknar $(a, b) \in \mathcal{R}$ som $a\mathcal{R}b$ och vi säger att *a står i relation till b.*

Definition

En ekvivalensrelation på A är en relation $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ som är:

1. *reflexiv*: $a\mathcal{R}a$ för alla $a \in A$ $((a, a) \in \mathcal{R})$;
2. *symmetrisk*: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ $((a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R})$;
3. *transitiv* $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$ $((a, b), (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R})$.

Om $a\mathcal{R}b$ då säger vi att *a är ekvivalent till b.*

Ekvivalensrelation

Exempel

Betrakta den följande relationen på $\mathbb{N}$:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ är jämnt.}$$

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation ?

Exempel

Betrakta den följande relationen på $\mathbb{N}$:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a + b \text{ är odda.}$$

Är $\mathcal{R}$ en ekvivalensrelation ?

Ekvivalensklass

Anmärkning

Låt A vara en mängd och $A_i \subseteq A$, $i = 1, 2, ..., k$. Vi säger att $\{A_i\}$ utgör en **partition** av A om

1. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k = A$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Exempel

Låt $A_1 = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ är jämnt}\}, A_2 = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ är odda}\}$. $\{A_1, A_2\}$ *utgör en partition av* $\mathbb{N}$.

Definition

Låt $\mathcal{R}$ vara en ekvivalensrelation på A. Ekvivalensklassen av ett element $a \in A$ defineras som

$$[a] = \{b \in A, b\mathcal{R}a\} \subseteq A.$$

Ekvivalensklass

Anmärkning

1. $x, y \in [a] \Rightarrow x\mathcal{R}y;$
2. $x \in [a] \Rightarrow [x] = [a],$
3. $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x] = [y]$
4. antingen är $[x] = [y]$ eller är $[x] \cap [y] = \emptyset.$

SATS

För varje ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på A utgör ekvivalensklasserna en partition av A.

Ekvivalensklass

Exempel

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$
$x\mathcal{R}y$ *om* $3/x - y$.

- $\mathcal{R}$ *är en ekvivalensrelation.*
- $[1] = \{1, 4, 7, 10, ..., 1 + 3n, ...\}$,
  $[2] = \{2, 5, 8, ..., 2 + 3n, ...\}, [3] = \{3, 6, 9, ..., 3n, ...\}$;
- $\mathbb{N} = [1] \cup [2] \cup [3]$, *och* $\{[1], [2], [3]\}$ *utgör en partition på* $\mathbb{N}$.

Heltal

Beteckna den följande relationen på $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(n, m)\mathcal{R}(l, k) \Leftrightarrow n + k = m + l.$$

Anmärkning

- Denna är en ekvivalensrelation.
- $(1, 3)\mathcal{R}(2, 4)\mathcal{R}(3, 5)...\mathcal{R}(n, n + 2)...$
- Vi betecknar ekvivalensklassen $[(1, 3)]$ med -2.
- $n = [n + 1, 1], 0 = [n, n], -n = [1, n + 1]$ för varje $n \in \mathbb{N}$.

Definition

$\mathbb{Z}$ defineras som mängden av ekvivalensklasser av $\mathcal{R}$.

Operationer på $\mathbb{Z}$

Definition

- $[(a,b)] + [(m,n)] = [(a+m, b+n)]$;
- $[(a,b)] \cdot [(m,n)] = [(am+bn, an+bm)]$;

De är väldefinierade:

$[(2,7)] \cdot [(3,5)] = (-5)(-2) = [(6+35, 10+21]) = 10$
$[(1,6)] \cdot [(1,3)] = (-5)(-2) = [(1+18, 3+6]) = 10.$

Egenskaper

Anmärkning

- $x \cdot 0 = 0$ för alla $x \in \mathbb{Z}$;
- $x + 0 = x$ för alla $x \in \mathbb{Z}$;
- För every $x \in \mathbb{Z}$ det finns ett element $(-x) \in \mathbb{Z}$ sådan att $x + (-x) = 0$.
- $x \cdot z = y \cdot z \ \ z \neq 0 \Leftrightarrow x = y$;

Beteckning

$$x - y = x + (-y).$$

Ordning

Definition

$[(a, b)] < [(m, n)] \Leftrightarrow a + n < b + m$

Anmärkning

- $0 \leq z \Leftrightarrow z = [(k + 1, 1)]$
- $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \leq y$, $0 \leq z \Leftrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$.

Begränsat mängd

Vi såg att varje delmängd av $\mathbb{N}$ har ett minsta element. Detta är inte sant för $\mathbb{Z}$.

Definition

Låt X vara en delmängd av $\mathbb{Z}$. Ett element $b \in \mathbb{Z}$ kallas *underbegränsning* till X om

$$b \leq x \text{ för alla } x \in X$$

- Det krävs inte att $b \in X$.
- En underbegränsning är inte unik.

Exempel

1. $X = \{x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 100x\}$. X *har* 0 *som underbegränsning.*
2. $X = \{x \in \mathbb{Z}, 3/x\}$ *har ingen underbegränsning.*

Begränsat mängd

SATS

Om en delmängd $X \in \mathbb{Z}$ har en underbegränsning då har X ett minsta element.