Grafer

April 28 2006

Bipartita Grafer

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om noderna kan delas upp i två disjunka delar $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sådan att varje kant är av formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$.

Vi definierade en relation R på e mängd X som en delmängd av $X \times X$:

$$R = \{(x, y) \text{ där } x \text{ står in relation med } y\}$$

En relation mella **två** mängder X, Y definieras på ett likande sätt som en delmängd $R \subseteq X \times Y$. Om $(x, y) \in R$ då är x in relation med y: xRy. Detta definierar en bipartit graf:

$$G_R = (X \cup Y, E), E = \{xy, (x, y) \in R\}.$$

SATS

Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartit graf. Det gäller att:

$$\sum_{x \in X} deg(x) = \sum_{y \in Y} deg(y) = |E|.$$

Exempel

Det finns 6 personer som ska fullgöra ett antal arbetsuppgifter. Varje person kan fullgöra exakt 6 arbetsuppgifter. Hur många arbetsuppgifter kan de komplettera, om det finns exakt 4 personer som kan fullgöra varje arbetsuppgift?

Exempel

Betrakta en 3-dim. Kub. Den utgör en graf. Skriv den som en bipartit graf.

Matching

Definition

En **matching** på en bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ är en delmängd $M \subseteq R$ sådan att varje par kanter i M är disjunkta(ingen gemensam nod).
Antalet element $|M|$ klallar man längden av M.

Definition

En matching kallas **maximal** om det inte finns en annan matching i G av större längd.
En matching kallas **komplett** om $|M| = |X|$.

Låt $A \subseteq X$.

$$J(A) = \{y \in Y, xy \in E \text{ för någon } x \in X\}.$$

Komplett Matching

SATS (Hall's condition)

En bipartit graf $G = (X \cup Y, E)$ *har en komplett matching om och endast om*

$$|J(A)| \geq |A|, \text{ för alla } A \subseteq X.$$

Exempel

Låt $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{A, B, C, D, E, F\}$, $E = \{aB, aF, bA, bC, bD, bE, cB, cF, dA, dC, dE, eA, eD, eE, eF, fE\}$.
Finns det en komplett matching?

Matching

Definition

Låt $G = (X \cup Y, E)$ vara en bipartiti graf. Vi säger att:

$$x_0 x_1 y_1 x_2 y_2 .... x_{k-1} y_k,\ x_i \in X, y_i \in Y.$$

är en **alternerade stig** för M om $x_{i-1} y_i \neq M$, och x_0, y_k är inte noder i M.

Definition

Vi kallar **deficiency** av den bipartita grafen G.

$$d = \max_{A \subseteq X} \{|A| - |J(A)|\}$$

Notera att $d \geq 0$ efetersom $|\emptyset| - |J(\emptyset)| = 0$. Halls condition säger att:

$$G \text{ har en komplett matching } \Leftrightarrow d = 0$$

Maximal Matching

SATS

Låt M vara en maximal matchin in G. Då är:

$$|M| = |X| - d.$$

SATS

Om M inte är maximal då innehåller G en alternerande stig.

Maximal Matching

En algoritm för att hitta en maximal matching:

1. Börja med en matching M_1 (vilken som helst)
2. Hitta en alternerande stig (det finns om M_1 inte är maximal)
3. Utgör en ny matching M_2 (från M och den alternerande stig).
4. Om M_2 inte är maximal börja om.