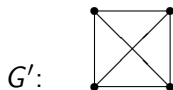
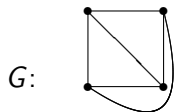


Grafer

April 26 2006

Betrakta de två följande grafer:



De ser olika ut med de kan ritas på samma sätt. Vi säger att de är isomorfa.

Definition

Två grafer $G = (E, V)$, $G' = (E', V')$ äre isomorfa om det finns en bijektiv funktion:

$$\alpha : V \rightarrow V'$$

sådan att $\alpha(x)\alpha(y) \in E'$ om och endast om $xy \in E$.

Definition

Två grafer G, G' är isomorfa, $G \cong G'$, om och endast om matrisen A_G kan fås från $A_{G'}$ genom att permutera raderna och kolumner.

Det betyder att $G \cong G'$ om och endast om $A_G = A_{G'}$ efter , vi sätter en annan ordning på noderna och kanterna i grafen G' .

Anmärkning

- ▶ Två isomorfa grafer har samma antalet komponenter.
- ▶ Två isomorfa grafer har samma antalet kanter och samma antalet noder.
- ▶ Motsvarande noder i isomorfa grafer har samma graden!
- ▶ Isomorfa grafer har samma antalet cykler.

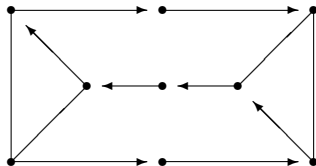
Exempel

Rita alla icke isomorfa grafer med 4 noder.

Definition

- ▶ En **hamiltonstig** är en stig som besöker varje nod precis en gång.
- ▶ En hamiltonscykel är en cykel som besöker varje nod en gång.
- ▶ En **eulersväg** är en väg som passerar varje kant precis en gång.
- ▶ En **eulerkrets** är en sluten väg (en väg som börjar och sultar på samma nod) som passerar varje kant precis en gång.
- ▶ En graf kallas **eulersk** om den har en Eulerkrets och kallas **hamiltonsk** om den har en hamiltonscykel.

Exempel



Betrakta grafen:

Den har en Hamiltonsväg, men det finns ingen Hamiltonscykel.
Visa det! (Inte lätt!)

Det är mycket lättare att bestämma om en graf är eulersk.

SATS

En graf G utan isolerade noder har en eulerkrets om och endast om den är sammanhängande och varje nod har jämn grad.

SATS

En graf utan isolerade noder har en eulerväg om och endast om den är sammanhängande och den har högst två noder av udda grad.

Exempel

- ▶ *Grafen i förre exempel har ingen eulrväg eller eulerstig, eftersom det finns 6 stycken noder med grad 3.*
- ▶ *K_n är eulersk bara om n är udda.*
- ▶ *K_n har en Eulerväg bara om n är udda eller $n = 2$.*

Definition

En graf $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om noderna kan delas upp i två disjunkta delar $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sådan att varje kant är av formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$.

Om varje nod i V_1 är förbund till varje nod i V_2 får vi den **fullständiga bipartita grafen**. Denna betecknas med $K_{m,n}$ när $|V_1| = m$ och $|V_2| = n$.

Exempel

Visa att alla cykler i en bipartit graf är av jämn längd.

Definition

En sammanhängande graf utan cykler kallas ett **träd**.

- ▶ Noder med graden 1 kallas **löv**.

SATS

Låt $T = (V, E)$ vara ett träd, då

$$|E| = |V| - 1$$

Exempel

Hur många icke-isomorfa träd med 6 noder finns det?

Definition

En **graffärgning** är en färgning av noder sådan att grannar alltid har olika färg. Den minsta antal färger som behövs för en graffärgning kallas den **kromatiska talet** av krafen G och skrivs $\chi(G)$.

En graf kan få många olika graffärgningar. Hur många?

Exempel

- ▶ $\chi(G) = 1$ om och endast om G består av isolerade noder, dvs $|E| = 0$.
- ▶ Om G är sammanhängande och har n noder gäller att $2 \leq \chi(G) \leq n$.
- ▶ Varje bipartit graf G har $\chi(G) = 2$.
- ▶ $\chi(K_n) = n$