Grafer

April 25 2006

Definition

Lt a, b vara två noder i en graph G. En **väg** från a till b av längt n defineras som en elternande foljd av noder och kanter

$$a = a_0, e_1, a_1, e_2, ..., e_n, a_n = b$$

sådan att $e_i = a_{i-1}a_i$ och sådan att en kant inte användas flera gånger.

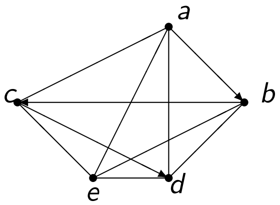
Vi beteknar vägen med $a_0 a_2 ... a_n$.

Definition

- Två noder *a* och *b* kallas **grannar** om *ab* är en kant i grafen.
- En väg som passerar varje nod högst en gång kallas en **enkel väg** eller en stig.
- En stig som börjar och slutar i samma nod och som passerar andra noder högst en gång kallas en **cykel**.
- En väg som börjar och slutar i samma nod och som passerar andra noder högst en gång kallas en **krets**.

Exempel

K_5 :

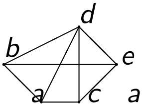


abcde är en enkel oppen väg från *a* till *e*, av längd 4.
abcdbe är en icke-enkel väg från *a* till *e* av längd 5.

Definition

Vi definierar **avståndet** mellan två noder a, b, $av(a, b)$, längden av den kortaste väg från a till b.

Exempel

- *Avståndet mellan varje par noder i K_n är lika med 1.*
- *Betrakta grafen W_4:* 

$av(d, e) = 1$, $av(e, a) = 2$.

Grafer

Definition

Låt $G = (V, E)$ vara en graf och $v \in V$ vara en nod av G. Med **valensen** eller **graden** av v, $deg(v)$, menas antalet kanter som har ändpunkt i v.

Exempel

För varje nod v i K_n gäller $deg(v) = n - 1$.

SATS

Låt $G = (V, E)$ vara en enkel graf. Då är:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Exempel

- *Det är klart att om en graf har n noder är $0 \leq deg(v) \leq n-1$ för varje nod v.*
- *Om en graf G har n noder och $deg(v) = n-1$ för varje nod i G är alla par noder förbundna. Då är $G = K_n$.*

Anmärkning

Om $G \neq K_n$ då kan man säga att $deg(v) \leq n-2$ för någon nod i G.

Exempel

1. *Om en graf har alla noder med odda grad så är antalet noder jämt.*
2. *En graf har* 20 *kanter, och alla noder har samma grad. Hur många noder har grafen?*

Grafer

Definition

En graf kallas **sammanhängande** om varje två noder kan förbindas.

En nod som inte är förbindat till någon annan nod kallas isolerade.

Definition

Låt G vara en graf. Då kallas grafen $G' = (V', E')$ en **delgraf** till G om $\emptyset \neq V' \subseteq V$ och $E' \subseteq E$.

Notera att varje graf med n noder kan tänkas son en delgraf av den kompletta graf K_n. Då kan vi definera:

Definition

Låt G vara en graf med n noder. Med **komplement** av G, $\overline{G}$, menas den delgraf av K_n som innehåller alla noder av G och alla kanter som inte finns i G.

Exempel

Låt G vara en grak med n noder sådan att G har 175 *kanter och dess komplement* 56 *kanter. Bestäm n.*

Grafer

Låt $G = (V, E)$ vara en graf med $V = \{v_1, ..., v_n\}$ och $E = \{k_1, ..., k_e\}$. Man kan definiera två matriser.

- En $n \times e$ matrisen $A_G = (a_{ij})$ definerat som:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } k_i \text{ är incident till } v_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

  Denna matrisen kallas den **incidensmatris**.

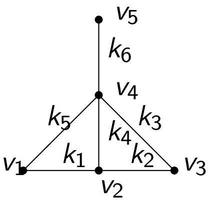
- En $n \times n$ matris, den **grannmatris**, $X_G = (x_{ij})$ där

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om det finns en kant mellan noder } v_i, v_j \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Insidensmatris

Exempel

Skriv den incidensmatris och den grannmatris av grafen G:



$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad X_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Insidensmatris

Anmärkning

- Antalet ettor i en rad av incidensmatricen är lika med graden av motsvarande nod.(Visa det)
- Varje kolumn i incidensmatrisen innehåller precis två ettor. (Visa det)
- En gannmatris är alltid symmetrisk.
- Permutationer av rader och kolumner i grannmatrisen innebär bara omnumrering av noderna.
- Permutationer av rader och kolumner i incidenstrisen innebär bara omnumrering av noderna och kanterna.