Algebra

April 19 2006

Delgrupper

Definition

Låt $(G, *)$ vara en grupp. En delmängd $\emptyset \neq H \subseteq G$ kallas en **delgrupp** om $(H, *)$ är en grupp.

Anmärkning

$\emptyset \neq H \subseteq G$ är en delgrupp om:

1. $x, y \in H \Rightarrow xh \in H$.
2. $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Exempel

- $A_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n, sign(\sigma) = 1\}$ *är en delgrupp till* $\mathcal{S}_n$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ *är en delgrupp till* $(\mathbb{R}, +)$.

cykliska grupper

Låt G vara en grupp och $x \in G$. Den delgrupp genererad av x är:

$$< x >= \text{ den minsta delgruppen som innehåller } x.$$

Anmärkning

$$< x >= \{..., x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2, x^3, ...\}.$$

Definition

Vi säger att en grupp G är en **cyklisk grupp** om det finns $x \in G$ sådan att:

$$G =< x > .$$

Exempel

- $(\mathbb{Z},+)$ *är cyklisk:* $\mathbb{Z} =< 1 >$.
- $(\mathbb{Z}_5 - \{0\},\cdot)$ *är cyklisk:* $\mathbb{Z}_5 - \{0\} =< [2] >=< [3] >$.

Anmärkning

Om $ord(x) = k$ då är $|G| = k$ och

$$G = \{1, x, x^2, ..., x^{k-1}\} :$$

Exempel

Låt $\tau = [1457326]$. *Bestäm hur många element har delgruppen* $< \tau > \subset \mathcal{S}_7$.

Exempel

Låt G, G' vara två cykliska grupper med k element. Då är

$$G \cong G'.$$

Eftersom de är alla isomorfa kommer vi att använda bara en beteckning för en **cyklisk grupp med k element**: C_k.

Exempel

$$C_k \cong (\mathbb{Z}_k, +).$$

Är produkten av två cykliska grupper cyklisk?

Anmärkning

Om m, n är relativt prima då är $C_n \times C_m$ cykliskt:

$$C_n \times C_m \cong C_{nm}.$$

Definition

Låt $g \in G$ och $H \subset G$ vara en delgrupp. Den **left coset av H** är mängden:

$$gH = \{gh, h \in H\}.$$

På liknande sätt definierar man den **right coset** som:

$$Hg = \{hg, h \in H\}.$$

Om Gär kommutativ då är $gH = Hg$.

Anmärkning

$$|gH| = |H|.$$

SATS

Låt G vara en grupp med ändligt många element, $|G| = n$,och $H \subset G$ vara en delgrupp. Den följande gäller:

- $|H|/|G|$.
- $ord(g)/n$,
- $g^n = 1$, *för varje element* $g \in G$.
- $n = p$ *primtal* $\Rightarrow G \cong C_p$.

Exempel

Låt $A_4 \subset \mathcal{S}_4$ vara delgruppen av alla permutationer σ med $sign(\sigma) = 1$. Beskriva alla delgrupper av A_4.