Permutationer

April 3 2006

transpositioner

Definition

En permutation av typ $[1^{n-2}2]$:

$$(x_1x_2)(x_3)(x_4)\ldots.(x_n) = (x_1x_2)$$

$$\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[drr] & & x_2 \arrow[dll] & x_3 \arrow[d] & \cdots & x_n \arrow[d] \\
x_1 & & x_2 & x_3 & \cdots & x_n
\end{tikzcd}$$

kallas **transposition**.

Exempel

$(15) = [52341]$.

transpositioner

Exempel

Betrakta cykeln $(15342) = (15)(14)(13)(12)$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & & := (12) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
2 & 3 & 1 & 4 & 5 & & := (13) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
2 & 3 & 4 & 1 & 5 & & := (14) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
2 & 3 & 4 & 5 & 1 & & := (15)
\end{array}
$$

Anmärkning

Varje cykel av längd k kan skrivas som en sekvens av $k-1$ transpositioner:

$$(x_1 ... x_k) = (x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) ... (x_1 x_2)$$

Vi kallar detta en transposition-upplösning.

Exempel

$[14576832] = (1)(2473568) = (28)(26)(25)(23)(27)(24).$

SATS

Antalet transpositioner i en transposition-upplösning av en permutation σ är entydigt bestämt.

transpositioner

Vi kan definera en function :

$$sign : \mathcal{S}_n \rightarrow \{-1, 1\} :$$

$$sign(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{om antalet transpositioner i en transp.-upplösning är jämnt.} \\ -1 & \text{om antalet transpositioner i en transp.-upplösning är odda.} \end{cases}$$

Exempel

- $sign([14532687]) = 1.$
- *För varje cykel σ av längd k är $sign(\sigma) = (-1)^{k-1}$.*
- *Om en permutation σ skrivs som $\sigma = \tau_1 \cdot ... \cdot \tau_d$ i cykel-form, då är:*

$$sign(\sigma) = sign(\tau_1) \cdot ... \cdot sign(\tau_d).$$

- $sign([15482673]) = sign((1)(25)(348)(6)(7)) = (-1)(-1)^2 = -1.$