Diskret Matematik:
" effektiva räknings metoder "

Mars 15 2006

Pyssla med heltal: heltalet 6174

Börja med 6174.
Skriv siffrorna i minskning ordning: 7641.
och i växande ordning: 1467.

$$7641 - 1467 = 6174!$$

Vi provar en gång till med 1938.
minskning ordning:1389, växande: 9831
9831-1389=8442
Börja igen med 8442
minskning: 8442, växande: 2448
8442-2448=5994
Fortsätta:
9954-4599=1998
9981-1899=8082
8820-0288=8532
8532-2358=6174

Man kan faktiskt VISA att om man börja med ett 4 siffrigt heltal då slutar man alltid med 6174.
Dessutom behöver man max. 7 steg!

Pyssla med heltal: är 9 delare till 582147?

1. 2 delar alla jämna tal.
2. 3 delar n om 3 delar summan av siffrorna i n.
3. 4 delar n om 4 delar talet av sista två siffrorna i n. $4/23435675416$
4. 5 delar n om sista siffran i n är 0 eller 5
5. 6 delar n om 1.+2.
6. 9 delar n om 2. händer två gånger, d.v.s om 9 delar summan av siffrorna i n.

Eftersom $5+8+2+1+4+7=27$ är 9 delare till 582147.

"God *really* created the natural numbers ($\mathbb{N}$), the rest is the work of man"

Vi ska försöka bygga upp "the rest":
Kursen är delad i 5 moment:

1. Beteckna $\mathbb{N}$,
   definera och beteckna mängden av heltal: $\mathbb{Z}$, (Biggs 4-8).
2. Inledande kombinatorik, (Biggs 10-11).
3. Inledande algebra, (Biggs 12,20-22).
4. Grafteori, (Biggs 15,17).
5. Kryptografi, (Bjorner).

Beteckning av $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

Vi ska tänka på $\mathbb{N}$ som en mängd med två operationer: $+, \cdot$

Anmärkning

Vi ofta betecknar en summa/produkt med:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_k, \prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k.$$

Definition

Låt $m, n \in \mathbb{N}$. Vi säger att m är **multipel** av n, eller att n **delar** m (n/m) om det finns $r \in \mathbb{N}$ sådan att

$$m = r \cdot n.$$

Ordning på $\mathbb{N}$

Definition

Låt $m, n \in \mathbb{N}$. Vi säger att $m < n$ om det finns $x \in \mathbb{N}$ sådan att $n = m + x$.

$a \leq b$ betyder att $a < b$ eller $a = b$.
$a \geq b$ betyder att $a > b$ eller $a = b$.

SATS

$$a < b \text{ och } b < c \Rightarrow a < c.$$

Definition

L Betrakta $A \subseteq \mathbb{N}$ en delmängd av $\mathbb{N}$. Ett **minsta element** (**största element**) av A är ett element $a \in A$ sådan att $a \leq n$ ($a \geq n$) för varje $n \in A$ ($a = min(A)$, minimum/ $a = max(A)$ maximum).

Axiomatisk beskrivning $\mathbb{N}$

Mängden $\mathbb{N}$ kan beskrivas som mängden med följande axiom:

1. $a + b, a \cdot b \in \mathbb{N}$.
2. $a + b = b + a, a \cdot b = b \cdot a$.
3. $a + (b + c) = (a + b) + c, a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
4. Det finns ett element 1, sådan att:

$$n \cdot 1 = n \text{ för varje } n \in \mathbb{N}.$$

5. $m \cdot x = m \cdot y \Rightarrow x = y$.
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
7. $m \neq n \in \mathbb{N} \Rightarrow m < n$ eller $m > n$.

Induktionsbevis

Vi ska visa att en egenskap $P(n)$ gäller för $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.
(ex. $P(n)$: $3/n^3 + 3n^2 + 2n$ för varje $m \in \mathbb{N}$, det betyder $n \geq 1$.)
Det är nödvändigt att visa att:

1. $P(n_0)$ gäller;
2. $P(k)$ gäller $\Rightarrow P(k+1)$ gäller .

För att visa exemplet ska man visa att:

1. $3/6$(OK);
2. $3/k^3 + 3k^2 + 2k \Rightarrow 3/(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 2(k+1)$.

Exempel

Visa att:

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Minsta element

SATS

Varje icke tom delmändg av $\mathbb{N}$, $\emptyset \neq A \subseteq, \mathbb{N}$ *har ett minsta element.*

Exempel

- $min(\{n \in \mathbb{N} \text{ s.a. } 3/n\}) = 3.$
- $min(\{n \in \mathbb{N} \text{ s.a. } n^3 + 5n \geq 60\}) = 5.$

Rekursion

En talföljd $\{a_n\} = \{a_1, ..., a_n, ...\}$ kan definieras genom ett explicit formel:
ex: $a_n = n^2$ ger $\{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$
eller genom en **rekursionsformel**: ange hur varje element kan beräknas ur det föregående:
ex: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ger $\{1, 4, 9, 16, ...\}$.

Exempel

Fibonacciföljd: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

$$F_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ..$$