Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några av övningarna på grafer, boolesk algebra och funktioner och relationer inför tentamensskrivningen.

1. Använder Karnaughdiagram.
2. Låt funktionen $f : R \to R$ där R betecknar de reella talen vara definierad genom

$$f(x) = 2x - 3.$$

Visa att f är en bijektiv funktion.

Lösn. Visar först att funktionen är surjektiv.

Låt y vara ett godtyckligt reellt tal. Löser ekvationen $y = 2x - 3$ med avseende på x. Man får $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$. Med detta värde på x gäller alltså $f(x) = y$. Till varje y finns alltså ett x så att $f(x) = y$, dvs funktionen är surjektiv.

Visar nu att funktionen är injektiv.

Antag att $f(x_1) = f(x_2)$. Då gäller att

$$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Detta innebär att funktionen är injektiv.

Eftersom funktionen både är injektiv och surjektiv så är den bijektiv.

3. För vilka värden på m och n har den kompletta bipartita grafen $K_{n,m}$ en Eulerkrets.

Lösn. Eftersom grafen är bipartit graf, delas nodmängden upp i två separata delar X och Y med respektive m och n stycken noder. Eftesom den dessutom är en *komplett* bipartit graf går från var och en av noderna i X precis en kant till varje nod i Y och vice versa. Noderna i mängden X har alltså valensen m och de i Y har valensen n.

Enligt känd sats har en graf en eulerkrets precis då varje nod har en jämn valens. Båda talen m och n måste alltså vara jämna.

4. En graf, utan loopar och multipla kanter, har 10 kanter och alla noder har samma valens. Vilka möjligheter finns det för antalet noder.

Lösn. Vet att om $\delta(v)$ betecknar valensen hos en nod v, V mängden av noder och E mängden av kanter så gäller

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Antal termer i summan är $|V|$ så om alla noder har samma valens $\delta(v) = \delta$ så får vi

$$|V|\delta = 2 \cdot 10 = 20.$$

Preliminärt kan alltså $|V|$ anta värdena 1, 2, 4, 5, 10, 20.

En graf med n stycken noder och utan loopar och multipla kanter kan som mest ha $\binom{n}{2}$ stycken kanter. Eftersom det finns precis 10 kanter kan vi utesluta fallen $n = 1, 2$ eller 4. Den kompletta grafen med 5 noder har precis 10 kanter, så 5 stycken noder är möjligt. Grafen som består av en cykel med 10 noder, där alla noder har valens 2, den grafen har också 10 kanter. Tillslut, om vi betraktar en graf med 20 noder där vi parar ihop noderna två och två, får vi också en graf med 10 kanter.

5. Låt $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ och definiera en relation R på $N \times N$ genom

$$(a, b)R(c, d) \quad \text{om} \quad ad = bc.$$

Visa att R är en ekvivalensrelation.

Lösn. Reflexiviteten följer av

$$ab = ba \quad \Rightarrow \quad (a, b)R(a, b).$$

Symmetrin av att

$$(a, b)R(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc \quad \Leftrightarrow \quad cb = da \quad \Leftrightarrow \quad (c, d)R(a, b).$$

Transitiviteten av att

$$\begin{cases} (a, b)R(c, d) \\ (c, d)R(e, f) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ad = bc \\ cf = de \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \Rightarrow \quad af = be \quad \Rightarrow \quad (a, b)R(e, f).$$

Om en relation är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är det en ekvivalensrelation.

6. Betrakta en graf utan loopar och multipla kanter. Låt M beteckna den största valensen för en nod i grafen och låt m beteckna den minsta valensen. Visa att

$$m \leq \frac{2e}{n} \leq M$$

där e betecknar antalet kanter och n betecknar antalet noder.

Lösn. Om grafens noder är $v_1, v_2, \ldots, v_n$ och $\delta(v_i)$ valensen för noden v_i så gäller ju att

$$\delta(v_1) + \delta(v_2) + \ldots + \delta(v_n) = 2e.$$

Då $m \leq \delta(v_i)$ för all tal i och $M \geq \delta(v_i)$ så får vi

$$m + m + \ldots + m \leq \delta(v_1) + \delta(v_2) + \ldots + \delta(v_n) = 2e,$$

och

$$M + M + \ldots + M \geq \delta(v_1) + \delta(v_2) + \ldots + \delta(v_n) = 2e.$$

Antalet m och antalet M i de bägge summorna är n alltså

$$n \cdot m \leq 2e \leq n \cdot M.$$

Dela nu med talet n.

7. Betrakta en graf utan loopar och multipla kanter. Visa att om $e > (\frac{n}{2})^2$ så kan inte grafen vara bipartit.

Lösn. Grafen bipartit innebär att nodmängden delas in i två delmängder X och Y. Varje kant går mellan en nod i X och en nod i Y. Antag X består av x stycken noder och Y av $n-x$ stycken noder. VI FÖRUTSÄTTER ATT DET FINNS n STYCKEN NODER TOTALT.

Flest kanter har den kompletta bipartita grafen $Kx, n-x$ som har $x(n-x)$ stycken noder (se uppgift 3.)

Vi visar nu att för varje värde på x så är $x(n-x) \leq (\frac{n}{2})^2$ eller ekvivalent att

$$(\frac{n}{2})^2 - x(n-x) \geq 0.$$

Om vi utvecklar vänsterledet ovan får vi med kvadratkomplettering

$$(\frac{n}{2})^2 - x(n-x) = (\frac{n}{2})^2 - nx + x^2 = (\frac{n}{2})^2 + (x - \frac{n}{2})^2 - (\frac{n}{2})^2 = (x - \frac{n}{2})^2.$$

detta uttryck är ju alltid större än 0.

Totala antalet kanter i den bipartita grafen är alltså alltid maximalt $(\frac{n}{2})^2$. Har vi en graf med fler kanter kan den inte vara bipartit.

Svar:

1. $xz + \bar{y}\bar{z} + yz\bar{w}$.
2.
3.
4. m och n jämna tal.
5. 5, 10 och 20.
6.