Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nr 5, variant B, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för media1, fredagen den 13 maj, 2005.

1. Låt G beteckna gruppen $G =< Z_{17} \backslash \{0\}, \cdot >$, dvs gruppen bestående av elementen skilda från noll i ringen Z_{17} med operationen multiplikation modulo 17. Bestäm en delgrupp H till G med två element och ange tre olika sidoklasser till H i G. Hur många olika sidoklasser till H finns det totalt i G. (*Två sidoklasser räknas som lika om de består av precis samma element.*)

   Lösning Mängden $H = \{1, -1\} = \{1, 16\}$ bildar en delgrupp med två element. Den är själv en sidoklass, $H = H1$. Två andra sidoklasser är $H2 = \{2, -2\} = \{2, 15\}$ och $H3 = \{3, -3\} = \{3, 14\}$

2. De inverterbara elmenten i ringen Z_{18} bildar en grupp G med sex element. Visa att G är cyklisk. (*Påminnelse: Ett element a i en ring Z_n är inverterbart precis då $sgd(a, n) = 1$.*)

   Lösning De inverterbara elementen är 1,5,7,11,13,17 eftersom det är precis de elementen som är relativt prima till 18. Vi undersöker nu vilka delgerupper som dessa element genererar:

   $$< 5 >= \{5, 5^2 = 7, 5^3 = 17, 5^4 = 13, 5^5 = 11, 5^6 = 1\}.$$

   Detta var ju alla element i den givna gruppen som alltså är cyklisk. Uppgiften är löst och vi behöver inte studera något av de resterande elementen.

   Alternativ lösning Elemenetet 5 ligger i givna gruppen eftersom $sgd(5, 18) = 1$. Den givan gruppen har sex element så ordningen av 5 delar 6. Men eftersom $5^2 = 7 \neq 1$ och $5^3 = 17 \neq 1$ så år enda möjligheten att 5:s ordning är 6. Detta element är då en generator för hela gruppen som då är cyklisk.

3. Låt G vara en cyklisk grupp med 27 element och antag att G genereras av elementet g. Ange på lämpligt sätt de element i denna grupp som har ordning tre. Visa också, t ex med hjälp av känd sats, att gruppen saknar element av ordning sex.

   Lösning Vi vet att ordningen av ett element måste dela antalet element i gruppen. Eftersom 6 inte delar 27 så finns inget element av ordning 6 i gruppen.

   Elementen $H = \{g^9, g^{18}, g^{27} = e\}$ bildar en grupp med 3 element och alla dessa element utom e har ordning 3. Om g^i skulle ha ordning 9 så skulle $g^{3i} = g^{k27}$ dvs $3i = 27k$. Detta ger att 9 delar talet i. De enda möjliga elementen är de i gruppen H.