Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nr 5, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för media1, fredagen den 13 maj, 2005.

1. Låt G beteckna gruppen $G =< Z_{13}\setminus\{0\}, \cdot >$, dvs gruppen bestående av elementen skilda från noll i ringen Z_{13} med operationen multiplikation modulo 13. Bestäm en delgrupp H till G med två element och ange tre olika sidoklasser till H i G. Hur många olika sidoklasser till H finns det totalt i G. (*Två sidoklasser räknas som lika om de består av precis samma element.*)

   Lösning Mängden $H = \{1, -1\} = \{1, 12\}$ bildar en delgrupp med två element. Den är själv en sidoklass, $H = H1$. Två andra sidoklasser är $H2 = \{2, -2\} = \{2, 11\}$ och $H3 = \{3, -3\} = \{3, 10\}$

2. De inverterbara elmenten i ringen Z_{14} bildar en grupp G med sex element. Visa att G är cyklisk. (*Påminnelse: Ett element a i en ring Z_n är inverterbart precis då $sgd(a, n) = 1$.*)

   Lösning De inverterbara elementen är 1,3,5,9,11,13 eftersom det är precis de elementen som är relativt prima till 14. Vi undersöker nu vilka delgerupper som dessa element genererar:

   $$< 3 >= \{3, 3^2 = 9, 3^3 = 13, 3^4 = 11, 3^5 = 5, 3^6 = 1\}.$$

   Detta var ju alla element i den givna gruppen som alltså är cyklisk. Uppgiften är löst och vi behöver inte studera något av de resterande elementen.

   Alternativ lösning Elemenetet 3 ligger i givna gruppen eftersom $sgd(3, 14) = 1$. Den givan gruppen har sex element så ordningen av 3 delar 6. Men eftersom $3^2 = 9 \neq 1$ och $3^3 = 13 \neq 1$ så år enda möjligheten att 3:s ordning är 6. Detta element är då en generator för hela gruppen som då är cyklisk.

3. Låt G vara en cyklisk grupp med 25 element och antag att G genereras av elementet g. Ange på lämpligt sätt de element i denna grupp som har ordning fem. Visa också, t ex med hjälp av känd sats, att gruppen saknar element av ordning 10.

   Lösning Vi vet att ordningen av ett element måste dela antalet element i gruppen. Eftersom 10 inte delar 25 så finns inget element av ordning 10 i gruppen.

   Elementen $H = \{g^5, g^{10}, g^{15}, g^{20}, g^{25} = e\}$ bildar en grupp med 5 element och alla dessa element utom e har ordning 5. Om g^i skulle ha ordning 5 så skulle $g^{5i} = g^{k25}$ dvs $5i = 25k$. Detta ger att 5 delar talet i. De enda möjliga elementen är de i gruppen H.