Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några grupptal inför lappskrivning 5 media.

1. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp G:

$$\begin{array}{c|cccccc} \circ & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & a & b & c & d & f & g \\ b & b & a & f & g & c & d \\ c & c & f & d & a & g & b \\ d & d & g & a & c & b & f \\ f & f & c & g & b & d & a \\ g & g & d & b & f & a & c \end{array}.$$

a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.

Man måste ta element för element och undersöka. $< a >= \{a^1 = a\}$, $< b >= \{b, b^2 = a\}$, $< c >= \{c, c^2 = d, c^3 = a\}$, $< d >= \{d, d^2 = c, d^3 = a\}$, $< f >= \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\}$, $< g >= \{g, g^2 = c, g^3 = b, g^4 = d, g^5 = f, g^6 = a\}$

b) Är gruppen själv cyklisk.

Ja eftersom $G = \{f, d, b, c, g, a\} = \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\} =< f >$.

c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen $H = \{a, b\}$.

Vi bestämmer mängderna H, Hb, Hc, Hd, Hf *och* Hg. *Vi får att*
$H = Hb = \{ab, bb\} = \{b, a\}$
$Hc = \{ac, bc\} = \{c, f\} = Hf$
$Hd = \{ad, bd\} = \{d, g\} = Hg$.

2. Visa att gruppen ovan är isomorf med grupperna $< Z_6, + >$ och $< Z_7 \setminus \{0\}, \cdot >$.

Vi konstaterar att alla tre grupperna är cykliska. I så fall finns ett standardsätt att konstruera en isomorfi, nämligen vi låter genratorer avbildas på generatorer potenser av dessa på varandra:

x	$\varphi(x)$	$\psi(x)$
f	1	3
$f^2 = d$	$1+1=2$	$3^2=2$
$f^3 = b$	$1+1+1=3$	$3^3=6$
$f^4 = c$	$1+1+1+1=4$	$3^4=4$
$f^5 = g$	$1+1+1+1+1=5$	$3^5=5$
$f^6 = a$	$1+1+1+1+1+1=6$	$3^6=1$

3. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?

Nej eftersom varje cyklisk grupp är abelsk, nämligen om elementet g genererar den cykliska gruppen så gäller

$$g^n \cdot g^m = g^{n+m} = g^{m+n} = g^m \cdot g^n.$$

4. Kan en grupp som är abelsk vara isomorf med en grupp som inte är abelsk?

Nej. Antag φ betecknar en isomorfi från en icke abelsk grupp G till en grupp H. Antag att $ab \neq ba$ för några element $a, b \in G$. Då gäller ju för isomorfin φ att

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \neq \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a),$$

dvs elementen $\varphi(a), \varphi(b) \in H$ kommuterar inte med varandra och H kan inte vara abelsk.

5. Gruppen $G =< Z_{17} \setminus \{0\}, \cdot >$ är cyklisk. Bestäm tre olika generatorer till G. Lös också ekvationerna $x^4 = 1$, $x^5 = 1$ och $x^6 = 1$ i denna grupp G.

Antalet element i G är 16. Vi får pröva oss fram i sökandet efter ett element som har ordning 16. Vi vet att för varje element $g \in G$ så gäller att ordningen delar talet 16, så ordningen kan endast vara något av talen 1, 2, 4, 8 eller 16.

Testar elementet 2. $2^4 = 16 = -1$ *så* $2^8 = (-1)^2 = 1$ *så ordningen av två är 8.*

Testar elementet 3. $3^4 = (-4)$, $3^8 = (-4)(-4) = 16 = -1 \neq 1$ *så enda möjligheten är att elementet 3 har ordning 16.*

Vi fortsätter med potenser av elementet 3. $(3^3)^k = 1$ *är detsamma som att* $3^{3k} = 1 = 3^{n16}$ *eller att* $3k = n16$ *som ger att 16 delar talet k. Alltså måste* 3^3 *ha ordningen 16. På samma sätt har elementet* 3^5 *ordningen 16.*

Varje element är en potens av 3. Så antag $x = 3^y$*. Då ger ekvationen* $x^4 = 1$ *oss ekvationen* $3^{4y} = 1$ *devs* $4y = n16$ *eller* $y = n4$*. Så* $x = 3^4, 3^8, 3^{12}, 3^{16}$*. På samma sátt löser man de andra ekvationerna:* $5y = n16$ *ger att* 16 *delar* y *dvs* $x = 1$ *resp* $6y = 16$ *eller att* 8 *delar talet* y

6. Låt ordningen av ett element g i en grupp G betecknas med $\sigma(g)$.

   a) Visa att om a och b är element i en grupp G sådana att $mgm(\sigma(a), \sigma(b)) = |G|$ så är gruppen cyklisk.

Uppgiften blev lite svårare än det var tänkt från början. Låt $m = mgm(\sigma(a), \sigma(b))$ *och* $D = sgd(\sigma(a), \sigma(b))$*. Sätt* $c = a^D$ *och låt* $r = \sigma(b)$*. Då gäller att*

$$c^{\sigma(a)/D} = a^{\sigma(a)} = e$$

och för alla $y < \sigma(a)/D$ *så kan inte* $a^y = e$ *eftersom* $\sigma(a)$ *är det minsta positiva heltal som a kan upphöjas till så att resultatet blir e. Detta ger att elemenetet c har ordningen* $s = \sigma(a)/D$*.*

När vi delar $\sigma(a)$ *med* D *förkortar vi bort alla gemensamma delare till* $\sigma(a)$ *och* $\sigma(b)$*, dvs talen* $s = \sigma(a)/D$ *och* $r = \sigma(b)$ *är relativt prima. Det innebär ordningarna för elementen c och b är relativt prima. Vidare är* $sr = mgm(\sigma(a), \sigma(b) = m)$

Jag hävdar nu att elementet cb har ordning sr och alltså är en generator för gruppen. Detta skulle visa att gruppen vore cyklisk.

Antag att $(cb)^n = e$ *för något tal* $n < m = sr$. *Antag att* $n = k_1 s + t_1$ *och* $n = k_2 r + t_2$. *Vi får då efetersom* $c^s = e$ *och* $b^r = e$ *att*

$$e = (cb)^n = c^n b^n = (c^s)^{k_1} c^{t_1} \cdot (b^r)^{k_2} b^{t_2} = c^{t_1} b^{t_2}.$$

Detta ger att

$$e = e^r = c^{rt_1} b^{rt_2} = c^{rt_1} \cdot (b^r)^{t_1} = c^{rt_1} \cdot (e)^{t_1} = c^{rt_1}.$$

Eftersom c *har ordning* s *så måste* $s|rt_1$. *Eftersom* r *och* s *är relativt prima så har vi att* $s|t_1$. *Eftersom* $n = k_1 s + t_1$ *får vi då att* $s|n$. *På samma sätt får vi att* $r|n$. *Alltså kan inte* $n < sr$, *eftersom* r *och* s *är relativt prima.*

b) Visa att om G är cyklisk så finns element a och b i G sådana att $mgm(\sigma(a), \sigma(b)) = |G|$.

Om elementet a *genererar gruppen så är* $\sigma(a) = |G|$. *Om* e *betecknar identiteten så är* $\sigma(e) = 1$. *Det gäller då att* $mgm(\sigma(a), \sigma(e)) = |G|$.

7. Visa att om antalet element i en grupp är ett primtal så är gruppen cyklisk.

Om $g \in G$ *så delar ordningen av* g *antalet element i gruppen* G. *Om detta antal är ett primtal* p *så finns bara en möjlighet, ordningen av elementet* g *är* p. *Elementen i mängden* $\{g, g^2, g^3, \ldots, g^p = e\}$ *blir då alla olika och* $G =< g >$.

Svar:

1. a) $< a >= \{a\}$, $< b >= \{b, b^2 = a\}$, $< c >= \{c, c^2 = d, c^3 = a\}$, $< f >= \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\}$. Elementet b har ordningen 2, elementen c, d har bägge ordningen 3 och elementen f, g har bägge ordningen 6.

2.

3. Nej.

4. Nej.

5. Elementet 3 genererar gruppen. Två andra generatorer är 3^3 och 3^5. Ekvationen $x^4 = 1$ har lösningarna $x = 3^4 = 13$, $x = 3^8 = 16$ resp $x = 3^{12} = 4$ och $x = x^{16} = 1$. Ekvationen $x^5 = 1$ har bara lösningen $x = 1$ och ekvationen $x^6 = 1$ har bara lösningarna $x = \pm 1$.