Matematiska Institutionen
KTH

Några kombinatoriktal inför lappskrivning 3 media.

1. Bland 10 lärare, 50 flickor och 45 pojkar skall tre skollag utses. Lag 1 består av fem lärare, 20 flickor och 15 pojkar. Lag två består av en lärare, 4 flickor och 13 pojkar och lag 3 består av resterande lärare och elever. Skriv upp ett utryck för antalet sätt detta kan ske på.

2. Hur många ord med längd 11 kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet MEDIATEKNIK.

3. Samma som i föregående uppgift men orden får inte innehålla två E:n efter varandra och inte heller kombinationerna DIA eller EKN.

4. Bestäm antalet surjektioner från $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ till $\{A, B, C, D\}$ sådana att 1 och 3 avbildas på olika element.

5. Beräkna Stirlingtalet $S(6, 2)$.

6. På hur många sätt kan 16 identiska bollar placeras i fem olika lådor om ingen av lådorna får vara tom och antalet bollar i den sista lådan är precis lika stort som summan av antalet bollar i de övriga lådorna.

Svar:

1.
$$\binom{10}{5,1,4} \cdot \binom{50}{20,4,26} \cdot \binom{45}{15,13,17}.$$

2.
$$\binom{11}{2,2,2,1,1,1,1,1}.$$

3.
$$\binom{11}{2,2,2,1,1,1,1,1} - (\binom{10}{2,2,1,1,1,1,1,1} + \binom{9}{2,2,1,1,1,1,1} + \binom{9}{2,1,1,1,1,1,1,1})+$$
$$(\binom{8}{2,1,1,1,1,1,1} + \binom{8}{2,1,1,1,1,1,1} + 7!) - 6!.$$

4.
$$4!S(5,4) - 4!.$$

5.
$$31.$$

6.
$$\binom{7}{3} = 35.$$

.

Med reservation för eventuella feltryck.

Lösningar:

1. **Operation 1:** Lärarna samanträder i lärarrummet och delar upp sig i lag 1, lag 2 och övriga. OBSERVERA etiketterade delmängder. Antalet sätt
$$n_1 = \binom{10}{5,1,4}.$$

Operation 2: Därefter träffas flickorna och delar upp sig i lag 1, lag 2 och övriga. Antalet sätt
$$n_2 = \binom{50}{20,4,26}.$$

Operation 3: Tillslut delar pojkarna upp sig i lag 1, lag 2 och övriga. Antalet sätt
$$n_3 = \binom{45}{15,13,17}.$$

Svaret erhålles genom att multiplikationsprincipen tillämpas.

2. Ordet har elva positioner. Dessa positioner etiketteras utifrån vilken bokstav som hamnar i respektive position. T ex ger ordet MEDIATEKNIK de etiketterade delmängderna $A = \{5\}$, $E = \{2,7\}$, $I = \{4,10\}$, osv. Svaret ges nu ur definitionen av multinomialkoefficient.

3. Principen om inklusion exklusion tillämpas. Mängden A består av ord innehållande kombinationen EE, mängden B av ord innehållande kombinationen DIA som delord och mängden C av de ord som innehåller kombinationen EKN som delord. Svaret på uppgeften ges av

$$\binom{11}{2,2,2,1,1,1,1,1} - |A \cup B \cup C|.$$

Inklusion exklusionsformeln lyder i detta fall

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|) + |A \cap B \cap C|.$$

För att beräkna t ex $|A|$ tänker vi oss bokstäverna som bokstavsklossar som skall kombineras. Om två E:n skall stå bredvid varandra så kan vi limma ihop dessa till en kloss, klossen EE. Vi har då 10 klossar att placera ut varav två I:n och två K:n. De bokstäverna övriga förekommer vardera precis en gång. Så $|A| = \binom{10}{2,2,1,1,1,1,1,1}$.

Talen $|B|$ och $|C|$ beräknas likadant, med hjälp av de ihopklistrade klossarna DIA respektive EKN.

För att beräkna antalet ord i $A \cap C$, måste vi tänka på att orden skall innehålla två E:n efter varandra samt delordet EKN. Enda möjligheten för detta är att delordet $EEKN$ finns med. Dett ord måste då betraktas som en kloss och kvar finns då sju klossar med bokstäverna $\{M, D, I, I, A, K, T\}$. Vi får $|A \cap C| = \binom{8}{2,1,1,1,1,1,1}$.

De andra snitten beräknas genom liknande ihopklistringar av klossar och vi får svaret ovan.

4. Svaret ges av totala antalet surjektioner minus antalet otillåtna surjektioner. De otillåtna surjektionerna är de surjektioner där 1 och 3 avbildas på samma element.

Totalt finns, enligt exempel genomräknade på föreläsningarna $4!S(5,4)$ olika surjektioner. Om 1 och 3 avbildas på samma element, kan vi betrakta de som ett element som vi betecknar 13. Antalet förbjudna surjektioner är lika med antalet surjektioner från mängden $\{13, 2, 4, 5\}$ till mängden $\{A, B, C, D\}$, dvs $4!S(4,4)$ som ju är lika med $4!$. Därför svar enligt ovan.

5. $S(6,2) = S(5,1) + 2S(5,2) = 1 + 2S(5,2)$

$S(5,2) = S(4,1) + 2S(4,2) = 1 + 2S(4,2)$.

$S(4,2) = S(3,1) + 2S(3,2) = 1 + 2S(3,2)$.

$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Nu går vi baklänges uppför formlerna ovan. $S(4,2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$, $S(5,2) = 1 + 2 \cdot 7 = 15$ och $S(6,2) = 1 + 15 = 31$.

6. Lika många bollar i låda fem som i de övriga ger att hälften av bollarna hamnar i lådorna ett till fyra och den andra hälften i låda fem. Således med nödvändighet kommer låda fem att innehålla hälften av 16 stycken bollar dvs åtta bollar.

De fyra första lådorna måste innehålla minst en boll var, så vi lägger först i en boll i varje låda. Återstår att fördela fyra identiska bollar i fyra olika lådor. Detta går på $\binom{4+3}{3}$ olika sätt.