Matematiska Institutionen
KTH

Några grupptal inför lappskrivning 5 media. Rättad version.

1. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp G:

$\circ$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	f	g	c	d
c	c	f	d	a	g	b
d	d	g	a	c	b	f
f	f	c	g	b	d	a
g	g	d	b	f	a	c

   a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.

   b) Är gruppen själv cyklisk.

   c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen $H = \{a, b\}$.

2. Visa att gruppen ovan är isomorf med grupperna $< Z_6, + >$ och $< Z_7 \setminus \{0\}, \cdot >$.

3. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?

4. Kan en grupp som är abelsk vara isomorf med en grupp som inte är abelsk?

5. Gruppen $G =< Z_{17} \setminus \{0\}, \cdot >$ är cyklisk. Bestäm tre olika generatorer till G. Lös också ekvationerna $x^4 = 1$, $x^5 = 1$ och $x^6 = 1$ i denna grupp G.

6. Låt ordningen av ett element g i en grupp G betecknas med $\sigma(g)$.

   a) Visa att om a och b är element i en *abelsk* grupp G sådana att $mgm(\sigma(a), \sigma(b)) = |G|$ så är gruppen cyklisk.

   b) Visa att om G är cyklisk så finns element a och b i G sådana att $mgm(\sigma(a), \sigma(b)) = |G|$.

7. Visa att om antalet element i en grupp är ett primtal så är gruppen cyklisk.

Svar:

1. a) $< a >= \{a\}$, $< b >= \{b, b^2 = a\}$, $< c >= \{c, c^2 = d, c^3 = a\}$, $< f >= \{f, f^2 = d, f^3 = b, f^4 = c, f^5 = g, f^6 = a\}$. Elementet b har ordningen 2, elementen c, d har bägge ordningen 3 och elementen f, g har bägge ordningen 6.

2.

3. Nej.

4. Nej.

5. Elementet 3 genererar gruppen. Två andra generatorer är 3^3 och 3^5. Ekvationen $x^4 = 1$ har lösningarna $x = 3^4 = 13$, $x = 3^8 = 16$ resp $x = 3^{12} = 4$ och $x = x^{16} = 1$. Ekvationen $x^5 = 1$ har bara lösningen $x = 1$ och ekvationen $x^6 = 1$ har bara lösningarna $x = \pm 1$.