LEKTION 03-29

Idag går vi genom några klasser av grafer.

Definition 0.1. Grafen $G = (V, E)$ kallas **bipartit** om noderna kan delas upp i två disjunka delar $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sådan att varje kant är av formen ab där $a \in V_1$ och $b \in V_2$.

Om varje nod i V_1 är förbunda till varje nod i V_2 får vi den **fullständiga** bipartit grafen. Denna betecknas $K_{m,n}$ när $|V_1| = m$ och $|V_2| = n$.

Exempel. Visa atta alla cykler i en bipartit graf är av jämn längt.

Låt γ vara en cykel som börjar och slutar i $a \in V_1$. Måste första och sista kant vara av formen $ab_1, b_n a$ där $b_1, b_2 \in V_2$. Cyklen är av formen $ab_1a_1b_2a_2...b_na$ där $b_i \in V_2$ och $a_i \in V_1$. Vi ser att cyklen har jämn längd.

Definition 0.2. En sammanhängande graf utam cykler kallas en **träd**.

- Noder med graden 1 kallas **löv**.

Vi har att:

Sats Låt $T = (V, E)$ vara ett träd, då

$$|E| = |V| - 1$$

Bevis. Vi ska bevisa det med hjälp an induktionen på $|V|$.

Om $|V| = 1$ vi måste ha $|E| = 0$, då är satsen sant. Antag att satsen gäller för varje träd med $|V| = k$. Vi ska visa at den gäller for en träd med $|V| = k + 1$. Låt ab vara en kant i T. Eftersom det finns bara den här kanten mellas a och b får vi två träd när vi tar borta ab från T. Beteckna dem med $T_1 = (V_1, E_1), T_2 = (V_2, E_2)$. Enligt induktion $|E_1| = |V_1| - 1$ och $|E_2| = |V_2| - 1$. Eftersom $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$ är vi klara.

Exempel Hur många icke-isomorfa träd med 6 noder finns det?

Definition 0.3. En fraf kallas **planär** om den (precist ska vi säga någon geometrisk representation av den) kan ritas i ett plan utan att några kanter skär varandra utanför noderna.

Grafer K_1, K_2, K_3, K_4 är planära.
Grafen K_5 är inte planär.

Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande planär graf. Antalet delytor beteknar vi med r. Man kan visa att:
Eulersats. Det gäller att:

$$|V| - |E| + r = 2$$

Så om K_5 var en planär graf skulle man rita den i planet med 7 delytor. Den är faktiskt omöjligt!

Definition 0.4. En **graffärgning** är en färgning av noder sådan att grannar alltid har olika färg. Den minsta antal färger som behövs för en graffärgning kallas den **kromatiska talet** av krafen G och skrives $\chi(G)$.

En graf kan få många olika graffärgningar. Hur många?
Exempel

- Herschels graf.
- $\chi(G) = 1$ om och endast om G består av isolerade noder, dvs $|E| = 0$.
- Om G är sammanhängande och har n noder gäller att $2 \leq \chi(G) \leq n$.
- Varje bipartit graf G har $\chi(G) = 2$.
- $\chi(K_n) = n$

Vi definerar $P_G(\lambda)$ som antalet graffärgningar av grafen G med λ stycken färger.
Man kan bevisa at $P_G(\lambda)$ är ett polynom i λ och därför kallas det det **kromatiska polynomet**
Exempel 7.8 i boken.

Övning

(1) Låt C_n vara en cykel av läncg n. Bestäm n om $\chi(G) = 2$.
(2) Betrakta grafen $K_{n,m}$. Bestäm graden av alla noder.
(3) Bestäm när $K_{n,m}$ eulerisk.
(4) Bestäm alla icke-isomorfa träd med 7 noder.
(5) Visa med hjälp av Eulersats att $K_3, 3$ är inte planär.