Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media 1 och IT1, 5B1118, fredagen den 26 augusti 2005.

1. Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{array}{rcrcr} 1435 & = & 2\cdot 891 & - & 347 \\ 891 & = & 3\cdot 347 & - & 150 \\ 347 & = & 2\cdot 150 & + & 47 \\ 150 & = & 3\cdot 47 & + & 9 \\ 47 & = & 5\cdot 9 & + & 2 \\ 9 & = & 4\cdot 2 & + & 1 \end{array}$$

   Svar Den största gemensamma delaren är 1.

2. I. Påståendet sant då $n = 0$ ty då är $VL_0 = (-1)^0(2\cdot 0+1) = 1$ och $HL_0 = (-1)^0(0+1) = 1$.

   II. Visar nu att för alla $n \geq 0$ gäller

$$VL_n = HL_n \quad \Rightarrow \quad VL_{n+1} = HL_{n+1}.$$

   Vi får

$$VL_{n+1} = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \ldots + (-1)^n(2n+1) + (-1)^{n+1}(2(n+1)+1) =$$

$$VL_n + (-1)^{n+1}(2n+3) = HL_n + (-1)^{n+1}(2n+3) = (-1)^n(n+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) =$$

$$(-1)^{n+1}[(2n+3)-(n+1)] = (-1)^{n+1}(n+2) = HL_{n+1}.$$

   Eftersom punkterna I. och II. är visade så gäller nu enligt induktionsprincipen påståendet för alla naturliga tal $n \geq 0$.

3. Ställer först de tre pojkarna i ett led. Detta går på $8\cdot 7\cdot 6$ olika sätt. Väljer sedan ut flickan. Finns 11 möjligheter. När vi sedan ställer in henne i ledet finns fyra möjliga platser att ställa henne på. Enligt multiplikationsprincipen får vi då

   Svar: $8\cdot 7\cdot 6\cdot 11\cdot 4$.

4. a) Ja, ty tabellen är symmetrisk kring huvuddiagonalen.

   b) Beräkna $a^{-1}b^3 = cbbb = cb\cdot bb = a\cdot 1 = a$.

   c) Vi finner att $aa = b$, $aaa = ab = c$, $aaaa = ac = 1$. Alltså blir $a^{445} = (a^4)^{111}a = 1^{111}a = a$.

5. Vet att för varje element g i gruppen gäller att g:s ordning delar 10, dvs antingen är ordningen 2, 5 eller 10. Vi prövar med elementet 2 och finner att $2^2 = 4 \neq 1$, $2^5 = 10 \neq 1$. Alltså måste ordningen av elementet 2 vara 10 och detta element gererer alltså hela gruppen. Gruppen är då cyklisk.

6. $n = 55 = 5 \cdot 11$ ger att $m = (5-1)(11-1) = 40$. Talet d skall satisfiera $e \cdot d \equiv 1 \pmod{40}$. Men vi ser direkt att $13 \cdot 3 \equiv 39 \equiv_{40} -1$ och därmed att $13(-3) \equiv_{40} 1$. Då $-3 \equiv_{40} 37$ så $d = 37$.

   Vi vet att $D(2) = 2^d \pmod{55}$. Räkningarna blir nu
$$2^{37} \equiv_{55} 2^{32}2^4 2.$$
   Vi finner att
$$2^8 = 256 \equiv_{55} (-19),$$
$$2^{16} \equiv_{55} (-19)^2 \equiv_{55} 361 \equiv_{55} (-24),$$
$$2^{32} \equiv_{55} (-24)^2 \equiv_{55} 576 \equiv_{55} 26.$$
   Vi får då att
$$2^{37} \equiv_{55} 2^{32}2^4 2 \equiv_{55} 26 \cdot 16 \cdot 2 \equiv_{55} 7$$

7. Uppenbarligen är $y = 4^{-1}$. Då $4 \cdot 16 = 64 \equiv 1 \pmod{63}$ så måste $y = 16$. Detta värde på y insatt i den fórsta ekvationen ger då att
$$37x + 5 \cdot 16 = 2,$$
   dvs $37x = 2 - 17 = -15 = 48$. Vi använder nu Euklides algoritm för att beräkna inversen till elementet 37 i ringen Z_{63}:
$$\begin{array}{rcrcr} 63 & = & 2 \cdot 37 & - & 11 \\ 37 & = & 3 \cdot 11 & + & 4 \\ 11 & = & 3 \cdot 4 & - & 1 \end{array}$$
   Detta ger
$$1 = 3 \cdot 4 - 11 = 3(37 - 3 \cdot 11) - 11 = 3 \cdot 37 - 10 \cdot 11 = 3 \cdot 37 - 10(2 \cdot 37 - 63) = -17 \cdot 37 + 10 \cdot 63.$$
   . Inversen till 37 i denna ring är alltså lika med -17. Vi får nu
$$37x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = -17 \cdot (-15) = 3$$
   Svar: $x = 3$ och $y = 16$.

8. Rita först en graf som består av en sexcykel, dvs sex noder och sex kanter, där alla noder har valensen två. Mellan varje grannpar av noder dras en extra kant. På dessa extra kanter placeras nu ut nio noder, med minst en nod på varje sådan kant. Denna graf uppfyller förutsättningarna i problemet.

9. Vi kan t ex låta $G_1 =< Z_6, + >$, den har delgrupperna $H_1 = \{0, 3\}$ och $H_2 = \{0, 2, 4\}$ med respektive två och tre element. Gruppen G_1 är abelsk så låter vi $G_2 = S_3$, den symmetriska gruppen på tre element, som inte är abelsk så kan inte grupperna G_1 och G_2 vara isomorfa. Den gruppen har delgrupperna $K_1 = \{id, (1\ 2)\}$ och $K_2 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ med två respektive tre element.

10. a) Om A och B vardera får k stycken kronor har de övriga tre personerna att dela på $18 - 2k$ kronor. Dessa pengar kan fördelas på
$$\binom{18 - 2k + 2}{2}$$

olika sätt. Eftersom k kan vara $0, 1, 2, \ldots, 9$ kronor blir svaret på a)

$$T = \sum_{k=0}^{9} \binom{18 - 2k + 2}{2}.$$

b) och c) Svaret S på b) uppgiften är detsamma som svaret på c) uppgiften, eftersom att A får mindre pengar än B är detsamma som att B får mer pengar än A. Totala antalet sätt att fördela de 18 mynten på är

$$\binom{18 + 4}{4.}$$

Antingen fördelas mynten efter a), b) eller c), så då gäller

$$\binom{18 + 4}{4} = T + S + S.$$

Svaret på b) och c)-uppgiften blir alltså

$$S = \frac{\binom{18+4}{4} - \sum_{k=0}^{9} \binom{18-2k+2}{2}}{2}.$$