Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nr 5, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT1, tisdagen den 30 november 2004 kl 13.15-14.00.

1. Låt G beteckna gruppen $G =< Z_{11} \setminus \{0\}, \cdot >$, dvs gruppen bestående av elementen skilda från noll i ringen Z_{11} med operationen multiplikation modulo 11. Visa att G är en cyklisk grupp.

   Lösning En grupp med n element är cyklisk precis då det finmns ett element g av ordning n i gruppen. Eftersom gruppen består av 10 element undersöker vi alltså om det finns ett element vars ordning är 10. Vi får prova oss fram och börjar med att pröva elementet 2. Enligt en följdsats till Lagranges sats gäller att om k är elementet g:s ordning så måste k dela anatalet element i gruppen, i detta fall 10. Vi finner att $2^2 = 4 \neq 1$ och $2^5 = 32 \equiv_{11} (-1)$. Elementet 2 har inte ordning 2 eller 5. Enda möjligheten ár att dess ordning är 10. Eftersom det finns ett element med ordning 10 så ár gruppen cyklisk.

2. Låt G vara gruppen $G =< Z_9, + >$, dvs gruppen bestående av elementen i ringen Z_9 med operationen addition modulo 9. Bestäm minst en delgrupp med tre element och ange samtliga höger sidoklassser till denna delgrupp.

   Lösning: Delmängden $H = \{0, 3, 6\}$ bildar en delgrupp med tre element. Sidoklasser förutom $H = H + 0$ är $H + 1 = \{1, 4, 7\}$ och $H + 2 = \{2, 5, 8\}$.

3. Betrakta en cyklisk grupp C_{18} med 18 element. Bestäm de möjliga ordningarna för elementen i denna grupp. (Om du nedan påstår att det finns element med en viss ordning skall du också ange ett sådant element. Du skall också motivera varför det inte finns element av de ordningar du utesluter.)

   Lösning: Ordningen hos ett element delar alltid antalet element i gruppen. Möjliga ordningar finns att finna bland talen 1, 2, 3, 6, 9, och 18. Låt g generera hela gruppen. Elementet g har ordning 18 och elementet $id = 1$ har ordnming ett. Låt $a = g^9$. Då gäller att $a^2 = 1$ och $a^1 \neq 1$ alltså är a:s ordning 2. Vidare låter vi $b = g^6$. Då gäller $b^1 = g^6$, $b^2 = g^{12} \neq 1$ men $b^3 = (g^6)3 = g^{18} = 1$, dvs b:s ordning är 3. Med $c = g^3$ har vi $c^2 = (g^3)^2 = g^6 \neq 1$, $c^3 = (g^3)^3 = g^9 \neq 1$, $c^4 = (g^3)^4 = g^{12} \neq 1$, $c^5 = (g^3)^5 = g^{15} \neq 1$, men $c^6 = (g^3)^6 = g^{18} = 1$ och alltså har c ordning 6. På samma sätt visas att $d = g^2$ har ordning nio. Det finns alltså element av ordningarna 1, 2, 3, 6, 9 och 18 och inte av några andra ordningar.