Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nr 3, variant B, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT1, tisdagen den 16 november 2004 kl 13.15-14.00.

1. Hur många olika ord kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet ITLINJEN. (OBS. Alla bokstäver i ordet skall användas.)

   Lösning: Av det åtta positionerna i det ord vi skall skriva ner skall två väljas till de två I:na och två till de två N:en. Svaret ges då av en multinomialkoefficient

$$\binom{8}{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!}.$$

2. Bestäm antalet tal mellan 1 och 500 som inte är delbara med något av talen 2, 5 och 9.

   Lösning: Vi använder metoden med inklusion exklusion. Låt A beteckna mängden av tal mellan 1 och 500 som är delbara med två, B mängden av tal mellan 1 och 500 som är delbara med 5 och C de tal mellan 1 och 500 som ár delbara med 9. Då gäller att svaret ges av

$$500 - |A \cup B \cup C|$$

   och

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|.$$

   Då vartannat tal är delbart med två, vart femte med fem och vart nionde med nio så

$$|A| = \frac{500}{2} = 250 \quad |B| = \frac{500}{5} = 100 \quad = \lfloor\frac{500}{9}\rfloor = 55,$$

   där $\lfloor r\rfloor$ för det reella r betecknar det största heltal som är mindre än r. (T ex $\lfloor\pi\rfloor = 3$.) Då $A \cap B$ består av de tal som är delbara med både 2 och 5 dvs med 10, $A \cap C$ består av de tal som är delbara med både 2 och 9 dvs med 18, $B \cap C$ består av de tal som är delbara med både 5 och 9 dvs med 45 och $A \cap B \cap C$ består av de tal som är delbara med både 2, 5 och 9 dvs med 90 får vi

$$|A \cap B| = \lfloor\frac{500}{10}\rfloor = 50, \quad |A \cap C| = \lfloor\frac{500}{18}\rfloor = 27, \quad |B \cap C| = \lfloor\frac{500}{45}\rfloor = 11$$

   och

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor\frac{500}{90}\rfloor = 5,$$

   Så **SVAR:** 500-(250+100+45)+(50+27+11)-5=188.

3. Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$ som uppfyller $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq -1$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 1$ och $x_5 \geq 0$.

Lösning: Vi börjar med en substitution: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3$, $y_4 = x_4 - 1$ och $y_5 = x_5$. Givna ekvationen kan då skrivas

$$y_1 + (y_2 - 1) + y_3 + (y_4 + 1) + y_5 = 12 \quad \text{dvs} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 12$$

med $y_i \geq 0$ för $i = 1, 2, \ldots, 5$. Svaret på en sådan gåta ges av

$$\binom{12+4}{4}.$$