Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nr 2, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT1, onsdagen den 10 november 2004 kl 13:15-14.00.

OBS Svaren skall motiveras och lösningarna skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Visa med hjälp av ett induktionsbevis att för alla naturliga tal n gäller att

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Lösning: (I) Likheten gäller för talet $n = 1$ eftersom vänstra ledet för detta värde på n är lika med 1 och högra ledet är lika med $1^2 = 1$.

(II) Vi visar nu att om likheten gäller för ett visst tal $n = p$ (induktionsantagandet) så gäller likheten också för nästa tal $n = p + 1$. Vi visar alltså implikationen

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2p - 1) = p^2 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2(p + 1) - 1) = (p + 1)^2.$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2(p + 1) - 1) = (1 + 3 + 5 + \ldots + (2p - 1)) + (2(p + 1) - 1) =$$
$$\{\text{om antagandet sant}\} = p^2 + (2(p + 1) - 1) = p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2.$$

(III) Efter det vi visat under (I) och (II) gäller nu påståendet enligt induktionsaxiomet.

2. Låt A, B och C beteckna nedanstående mängder i det universum som består av de naturliga talen:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 6, 9, 12\}.$$

Bestäm de element som tillhör mängden

$$((A \cup B^C) \cap C) \setminus A.$$

Lösning: De sökta elementen är de som inte ligger i A men som ligger i C och $A \cup B^C$. Elementet 12 är enda element i C som inte ligger i A. Det ligger i B:s komplement och därmed

SVAR: 12.

3. Visa att $A \cap B = C$ och $B \cup C = A$ så måste $A = B = C$.

Lösning: Om $A \cap B = C$ så är C en delmängd till B. Då gäller att $B = B \cup C = A$ och alltså är $A = B$. Men om så är fallet är $A = A \cap B = C$ dvs $C = A$.