Lösningar till två uppgifter som ej blev färdiglösta vid repetitionen den 13 december

1. Lös i ringen Z_{58} ekvationen $(7x+1)(3x+2) = 0$.

Lösning: Fyra olika möjliga fall betraktas.

Fall 1: $7x+1 \equiv 0 \pmod{58}$ eller ekvivalent $7x \equiv -1 \pmod{58}$. Då är i givna ringen $x = -7^{-1}$. Euklides algoritm användes för att beräkna 7^{-1}: $58 = 8 \cdot 7 + 2$ och $7 = 3 \cdot 2 + 1$ ger att

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3 \cdot (58 - 8 \cdot 7) = 3 \cdot 58 + 25 \cdot 7$$

och alltså $7^{-1} = 25$. I detta fall blir svaret $x = -25 = 33$.

Fall 2: $3x + 2 \equiv 0 \pmod{58}$ eller ekvivalent $3x \equiv -2 \pmod{58}$. Vi får i detta fall att $x = 3^{-1}(-2) \pmod{58}$. Då $3 \cdot 19 = 57 = -1$ i ringen Z_{58} så är $3^{-1} = -19$ och $x = (-2)(-19) = 38$.

Fall 3: $7x + 1 \equiv 29 \pmod{58}$ och $(3x + 2)$ är ett jämnt tal. Då är

$$x \equiv_{58} 7^{-1}(29 - 1) \equiv_{58} 25 \cdot 28 \equiv_{58} 700 \equiv_{58}\equiv_{58} 4$$

och i detta fall $x = 4$.

Fall 4: $3x + 2 \equiv 29 \pmod{58}$ och $(7x + 1)$ är ett jämnt tal. Som ovan får vi

$$x \equiv_{58} 3^{-1}(29 - 2) \equiv_{58} (-19)27 \equiv_{58} -513 \equiv_{58} 9$$

och då $(7 \cdot 9 + 1)$ är ett jämnt tal har vi även i detta fall en lösning $x = 9$.

SVAR: 4, 9, 33, 38.

2. Visa att en grafen G, med v stycken noder och e stycken kanter, som saknar loopar (öglor) och multipla kanter och uppfyller

$$e > (\frac{v}{2})^2$$

måste G vara sammmanhängande.

Lösning: Antag att grafen inte är sammanhängande, utan att grafens noder kan delas upp i två delar V_1 och V_2 utan att det fanns någon kant mellan noder i V_1 och noder i V_2. Antalet noder i V_1 betecknar vi med x och antalet noder i V_2 med $v - x$. Delgrafen V_1 kan som mest innehålla $x(x-1)/2$ kanter och delgrafen V_2 som mest $(v-x)((v-x)-1)/2$ kanter.

Totala antalet kanter i denna graf blir då högst

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(v-x)(v-x-1)}{2} = \frac{x^2 - x + v^2 - 2vx + x^2 - v + x}{2} = \frac{2x^2 + v^2 - 2vx - v}{2}.$$

Det tal x som ger störst värde på detta uttryck är ett tal x som satisfierar $f'(x) = 0$. Deriverar vi får vi $f'(x) = 2x - v$ varför extremum erhålles i punkten $x = v/2$. Sätter in i $f(x)$ och får

$$f(\frac{v}{2}) = (\frac{v}{2})^2 - \frac{v}{2}.$$

Detta tal är ju mindre än $(v/2)^2$ och alltså om vi har fler kanter än detta tal kan inte nodmängderna V_1 och V_2 finnas enligt ovan. Grafen måste då vara sammanhängande.