Matematiska Institutionen
KTH

Övningstal till Diskret Matematik CL torsdagen den 24 februari

Uppvärmning.

1. a) Skriv upp additionstabellen till gruppen $< Z_6, + >$.

b) Skriv upp multiplikationstabellen till gruppen av intertibla element i Z_9. Bestäm också ordningen av samtliga element i denna grupp.

c) Skriv upp multiplikationstabellen till en cyklisk grupp med 7 element.

Betyget tre uppgifter.

3. Följande tabell är en multiplikationstabell, eller som läroboken säger en grupptabell, till en grupp. Svara, med motiveringar, på följande frågor: a) Är gruppen abelsk , b) Finns det något element x i gruppen sådant att x inte är gruppens identitetselement men $x^3 = x \circ x \circ x$ är lika med gruppens identitetselement och c) Har gruppen någon delgrupp med två element.

$\circ$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

4. Låt G vara gruppen $G =< Z_8, + >$, dvs gruppen bestående av elementen i ringen Z_8 med operationen addition modulo 8. Bestäm minst en delgrupp med två element och ange samtliga höger sidoklassser till denna delgrupp.

5. Låt G beteckna gruppen $G =< Z_{11} \setminus \{0\}, \cdot >$, dvs gruppen bestående av elementen skilda från noll i ringen Z_{11} med operationen multiplikation modulo 11. Visa att G är en cyklisk grupp.

Betyget fyra uppgifter.

6. Visa att om H och K är delgrupp till samma grupp G så gäller också att $H \cap K$ är en delgrupp till G.

7. Bestäm automorfigruppen till en regelbunden 5-hörning respektive 6-hörning.
Anm. Automorfigruppen består av de bijektioner på mängden av hörn som avbildar grannhörn på grannhörn.

8. Visa att följande tabell inte är någon multiplikationstabell till en grupp:

$\circ$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	1	d	c
b	b	c	d	a	1
c	c	d	a	1	b
d	d	1	c	b	a

9. Betrakta en cyklisk grupp C_{20} med 20 element. Bestäm de möjliga ordningarna för elementen i denna grupp. (Om du nedan påstår att det finns element med en viss ordning skall du också ange ett sådant element. Du skall också motivera varför det inte finns element av de ordningar du utesluter.)

Betyget fem uppgifter.

10. Bestäm automorfigruppen till en regelbunden n-hörning.

11. Visa att om elementen g och h i den abelska gruppen G har ordningarna n respektive m där n och m är relativt prima så har elementet gh ordningen nm.

12. Visa att ingen ändlig grupp G med fler än två element är lika med unionen av två icke triviala delgrupper H_1 och H_2 till G, dvs G kan aldrig uppfylla $G = H_1 \cup H_2$ där $H_i \neq G$ för $i = 1, 2$.
b) Bestäm en grupp G med minst tre element som är lika med unionen av tre icketriviala delgrupper till G.

Extra kombinatorikfråga

13. Undersök om det finns någon formel för antalet sätt $D(n, m, k)$ att dela in mängden $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ i k stycken icketomma delmängder så att elementen $1, 2, \ldots, m$ hamnar i olika delmängder.

Några svar och lite ledningar.

3. a) nej, b) ja, c) ja.
9. 1, 2, 4, 5, 10, 20.
13. Vet ej ännu. Antagligen.