

Matematiska Institutionen
KTH

Övningstal till Diskret Matematik CL fredagen den 18 februari

Uppvärmning.

1. a) Beräkna $S(3, 1)$, $S(4, 1)$ och $S(5, 3)$.
b) Bestäm antalet tal mellan 1 och 100 som inte är delbara med något av talen 2, 5 och 9.
c) En blind man har 10 bruna och 10 grå sockor i en låda. Hur många måste han minst ta upp för att med säkerhet få ett par.
2. Bestäm antalet f surjektioner från $\{1, 2, \dots, 7\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$.

Betyget tre uppgifter.

3. Bestäm antalet ord av längd åtta som man kan bilda med hjälp av bokstäverna i ordet DALALVEN, sådana att inga två likadana bokstäver står efter varandra.
4. Bestäm antalet f surjektioner från $\{1, 2, \dots, 7\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$ sådana att $f(1) \neq f(2)$.
5. Visa att bland 12 godtyckligt valda tal kan man alltid finna två tal vars differens är delbar med 11.

Betyget fyra uppgifter.

6. Bestäm antalet sätt att dela in mängden $\{1, 2, \dots, 7\}$ i fyra icke-tomma delmängder sådana att elementen 1, 2 och 3 hamnar i olika delmängder.
7. Bestäm antalet lösningar till ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$ sådana att $x_1 \geq 0$, $-2 \leq x_2 \leq 5$, $1 \leq x_3 \leq 7$ och $0 \leq x_4 \leq 5$.
8. Visa att $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$.
9. Undersök om det finns en uppsättning delmängder till $M = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ med egenskapen att varje delmängd innehåller fem element och varje element i M tillhör precis tre olika delmängder.

Betyget fem uppgifter.

10. Hur många olika ord av längd 9 kan man bilda med hjälp av bokstäverna i ordet ANNA-BELLA om två likadana bokstäver aldrig står bredvid varandra.
11. Visa att mängden av delmängder till mängden av naturliga tal är en överuppräknelig mängd.
12. Visa att $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.
13. Betrakta en liksidig triangel med sidlängden 1. Visa att om fem punkter väljs på måfå i triangeln så finns två bland dessa vars avstånd är högst lika med $1/2$.

Några svar och lite ledningar.

1. a) 1, 1, och 25. b) 35. c) 3.
2. $4!S(7,4)$.
3. $\binom{8}{2,2,1,1,1,1} - 2\binom{7}{2,1,1,1,1} + 6!$.
4. $4!(S(7,4) - S(6,4))$.
5. Ledning: Tänk på restklasser t ex.
7. Ledning: Använd inklusion exklusion. Otillåten lösning är t ex om $x_3 \geq 8$.
8. Ledning: Tänk på att precis en mängd kommer att bestå av två element.
9. Nej.
11. Ledning: Kantors diagonalförfarande.