Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för CL3, 5B1118, den 27 maj 2005, 08.00-13.00

1. Fermats lilla sats ser att $8^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Dett ger nu

$$8^{121} = (8^{12})^{10} \cdot 8 \equiv_{13} 1^{10} \cdot 8 \equiv_{13} 8.$$

   Svar: 8.

2. Vi får att $\psi = (1\ 6)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(1\ 2)$ och således är ψ en produkt av fem transpositioner. Vidare $\gamma = (1\ 3)(1\ 4)(2\ 6)(2\ 5)$ dvs en produkt av fyra transpositioner. Multiplicerar vi nu ihop alla dessa transopsitioner får vi att $\psi^2\gamma^3$ är en produkt av $2{\cdot}5{+}3{\cdot}4 = 22$ transpositioner, dvs en jämn permutation.

   Svar: Jämn.

3. Skriv följande booleska uttryck på en minimal disjunktiv form:

$$\bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{y}w + \bar{w}(x\bar{y} + \bar{x}y) + \bar{x}y\bar{z}w.$$

   Vi för in uttrycket i ett karnaughdiagram och för samman markerade rutor i rektanglar, så stors som möjligt, med 1, 2, 4 eller 8 rutor. Dessa motsvarar de minimala termerna i disjunktionen. Vi får då

   Svar: $\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{w} + \bar{x}\bar{w} + \bar{x}\bar{z}$.

4. Svaret på uppgift 4 är $13!\binom{12}{8}\binom{9}{5}$. Ställ problemet.
   T ex En skolklass har 12 flickor och nio pojkar. Åtta flickor och fem pojkar skall ställa sig på ett led. På hur många sätt kan detta ske?

5. Låt C vara en 1-felsrättande kod med kontrollmatrisen

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Antalet ord i koden C är 2^{n-r} där n är ordlängden och r är kontrollmatrisens rang. Då $n = 8$ och $r = 4$ har vi alltså att C besår av $2^{8-4} = 16$ stycken ord.

   b) Bestäm antalet ord som ligger på avståndet högst ett från något kodord. Antalet ord i en 1-sfär kring ett kod ord är $1 + 8$, där 8 står för antalet positioner som fel kan uppstå i. Totalt består varje 1-sfaär alltså av nio ord. Eftersom 1-sfärerna runt kodorden är disjunkta blir totala antalet ord på högst avstånd ett från något kodord lika med

$$16 \cdot 9 = 144.$$

c) Bestäm ett ord som koden inte kan rätta. Ordet 00001110 kan koden inte rätta eftersom

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som ju inte finns med som kolonn i kontrollmatrisen.

d) Bestäm totala antalet ord som koden inte kan rätta. Totalt finns $2^8 = 256$ stycken olika ord av längd 8. Av dessa kan koden rätta 144 stycken eftersom det är precis det antalet ord som ligger på avstånd ett från något kodord. Alltså finns $256 - 144 = 112$ ord som koden inte kan rätta.

6. Eftersom $H \cap K$ är en delgrupp till både H och K, så ger Lagranges sats att $|H \cap K|$ delar både $|H|$ och $|K|$ dvs $|H \cap K|$ delar både 35 och 27. Enda gemensamma delaren till dessa tal är ju 1. Alltså $H \cap K$ består av bara ett element. Eftersom denna mängd är en grupp och varje grupp innehåller ett identitetselement så är detta enda element just identitetselementet.

7. a) Varje sammanhängande graf G har ett spännande träd. Om grafen har v stycken noder kommer det spännande trädet att ha $v - 1$ stycken kanter. Grafen G kommer då att ha minst $v - 1$ stycken kanter. Största antalet noder i förhållande till antalet kanter får vi alltså när grafen är ett träd.

   Det finns träd med 38 noder och 37 kanter. En sammanhängande graf med fler än 38 noder måste minst ha 38 kanter.

   Svar: 38 stycken noder.

   b) Flest kanter i förhållande till antalet noder får vi när vi har en komplett graf, dvs en graf där mellan varje par av noder finns precis en kant.

   Kompletta grafen med nio noder har då $\binom{9}{2} = 36$ stycken kanter. Så vi måste ha minst 10 noder. eftersom den komplett garfen med 10 noder har $\binom{10}{2} = 45$ kanter kan vi ta den grafen och plocka bort kanter tills vi får en graf med 37 stycken noder.

   Svar: 10 stycken noder.