Institutionen för matematik
KTH

Lösningar till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för CL3, 5B1118, den 26 augusti 2005

1. $n = 55 = 5 \cdot 11$ ger att $m = (5-1)(11-1) = 40$. Talet d skall satisfiera $e \cdot d \equiv 1 \pmod{40}$. Men vi ser direkt att $13 \cdot 3 \equiv 39 \equiv_{40} -1$ och därmed att $13(-3) \equiv_{40} 1$. Då $-3 \equiv_{40} 37$ så $d = 37$.

   Vi vet att $D(2) = 2^d \pmod{55}$. Räkningarna blir nu

   $$2^{37} \equiv_{55} 2^{32} 2^4 2.$$

   Vi finner att

   $$2^8 = 256 \equiv_{55} (-19),$$
   $$2^{16} \equiv_{55} (-19)^2 \equiv_{55} 361 \equiv_{55} (-24),$$
   $$2^{32} \equiv_{55} (-24)^2 \equiv_{55} 576 \equiv_{55} 26.$$

   Vi får då att

   $$2^{37} \equiv_{55} 2^{32} 2^4 2 \equiv_{55} 26 \cdot 16 \cdot 2 \equiv_{55} 7$$

2. Uppenbarligen är $y = 4^{-1}$. Då $4 \cdot 16 = 64 \equiv 1 \pmod{63}$ så måste $y = 16$. Detta värde på y insatt i den fórsta ekvationen ger då att

   $$37x + 5 \cdot 16 = 2,$$

   dvs $37x = 2 - 17 = -15 = 48$. Vi använder nu Euklides algoritm för att beräkna inversen till elementet 37 i ringen Z_{63}:

   $$\begin{array}{rclcr} 63 & = & 2 \cdot 37 & - & 11 \\ 37 & = & 3 \cdot 11 & + & 4 \\ 11 & = & 3 \cdot 4 & - & 1 \end{array}$$

   Detta ger

   $$1 = 3 \cdot 4 - 11 = 3(37 - 3 \cdot 11) - 11 = 3 \cdot 37 - 10 \cdot 11 = 3 \cdot 37 - 10(2 \cdot 37 - 63) = -17 \cdot 37 + 10 \cdot 63.$$

   . Inversen till 37 i denna ring är alltså lika med -17. Vi får nu

   $$37x = 48 \quad \Rightarrow \quad x = -17 \cdot (-15) = 3$$

   Svar: $x = 3$ och $y = 16$.

3. Rita först en graf som består av en sexcykel, dvs sex noder och sex kanter, där alla noder har valensen två. Mellan varje grannpar av noder dras en extra kant. På dessa extra kanter placeras nu ut nio noder, med minst en nod på varje sådan kant. Denna graf uppfyller förutsättningarna i problemet.

4. Eftersom $A \cap B = C$ så måste C vara en delmängd till B. Då gäller att $B \cup C = B$. Men då vi vet att även $B \cup C = A$ så måste $B = A$. Men då är $A \cap B = B$. Alltså, emedan $A \cap B = C$, så är även $C = B$.

5. Vi använder oss av ett induktionsbevis.

   I. För $n = 1$ gäller $a_1 = 1$ och
   $$(\frac{7}{4})^1 = \frac{7}{4} > 1.$$
   Vi behöver även i induktionssteget att $a_2 < (7/4)^2$ men det är ju också sant då $a_2 = 2$ och
   $$(\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16} > 2.$$
   II. Visar nu att för alla naturliga tal $n \geq 1$ gäller att
   $$a_n < (\frac{7}{4})^n \quad \text{och} \quad a_{n-1} < (\frac{7}{4})^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} < (\frac{7}{4})^{n+1}. \qquad (P)$$
   Vi finner om förutsättningarna till vänster om implikationspilen ovan är sanna så gäller
   $$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < (\frac{7}{4})^n + (\frac{7}{4})^{n-1} = (\frac{7}{4})^{n-1}(\frac{7}{4} + 1) = (\frac{7}{4})^{n-1}\frac{11}{4} < (\frac{7}{4})^{n-1}\frac{49}{16} = (\frac{7}{4})^{n+1}.$$
   Påståendet (P) är alltså visat.

   Enligt induktionsprincipen har vi nu visat påståendet i uppgiften eftersom vi har visat både I. och II.

6. Vi kan t ex låta $G_1 =< Z_6, + >$, den har delgrupperna $H_1 = \{0, 3\}$ och $H_2 = \{0, 2, 4\}$ med respektive två och tre element. Gruppen G_1 är abelsk så låter vi $G_2 = S_3$, den symmetriska gruppen på tre element, som inte är abelsk så kan inte grupperna G_1 och G_2 vara isomorfa. Den gruppen har delgrupperna $K_1 = \{id, (1\ 2)\}$ och $K_2 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ med två respektive tre element.

7. a) Om A och B vardera får k stycken kronor har de övriga tre personerna att dela på $18 - 2k$ kronor. Dessa pengar kan fördelas på
   $$\binom{18 - 2k + 2}{2}$$
   olika sätt. Eftersom k kan vara $0, 1, 2, \ldots, 9$ kronor blir svaret på a)
   $$T = \sum_{k=0}^{9} \binom{18 - 2k + 2}{2}.$$
   b) och c) Svaret S på b) uppgiften är detsamma som svaret på c) uppgiften, eftersom att A får mindre pengar än B är detsamma som att B får mer pengar än A. Totala antalet sätt att fördela de 18 mynten på är
   $$\binom{18 + 4}{4.}$$
   Antingen fördelas mynten efter a), b) eller c), så då gäller
   $$\binom{18 + 4}{4} = T + S + S.$$
   Svaret på b) och c)-uppgiften blir alltså
   $$S = \frac{\binom{18+4}{4} - \sum_{k=0}^{9} \binom{18-2k+2}{2}}{2}.$$