Matematiska Institutionen
KTH

Diskret matematik CL. Svar på fråga från Ellinor.

Frågan var huruvida man kan tänka sig att ekvationen $x^2 = 1$ kan ha godtyckligt många lösningar.

Med hjälp av kinesiska restsatsen, se stencil, kan man visa att varje ring Z_n i princip kan uttryckas som en direkt produkt av andra ringar:

$$Z_n = Z_{p_1^{e_1}} \times Z_{p_2^{e_2}} \times \ldots \times Z_{p_k^{e_k}}$$

där p_1, p_2, ..., p_k är olika primtal varvid $1 = (1, 1, \ldots, 1)$ och multiplikationen sker termvis:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k)(b_1, b_2, \ldots, b_k) = (a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_kb_k)$$

och räkningarna i varje koordinatposition utföres i respektive ring.

Som exempel har vi att $Z_{12} = Z_3 \times Z_4$ och att $(\pm1, \pm1)^2 = (1, 1) = 1$. Vi får alltså fyra lösningar till ekvationen $x^2 = 1$ nämligen de element i Z_{12} som svarar mot elementen $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ och $(-1, -1)$.

I den allmänt beskrivna ringen ovan är alltså antalet lösningar till $x^2 = 1$ minst lika med 2^k.

Nästa fråga blir alltså om antalet lösningar alltid är en 2-potens. Mitt förslag är att om man är intresserad undersöker antalet lösningar till $x^2 = 1$ i ringarna Z_4, Z_8, Z_9, Z_{16} och Z_{25} för att se vad som händer. Jag vet inte.

Hälsn

Olle