KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 3 i 5B1117, Matematik III
15 maj 2006, kl 14.00-15.00

Version höger.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
Allmant gäller att mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng

Efternamn	Förnamn	Personnr

1. Beräkna $\iint_\Sigma rot(\mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$, då $\mathbf{F} = \left(z^2 - y, x + \sin z, x^4 + y^4\right)$ och Σ är ytan som definieras av $z = \tan\left(1 - x^2 - y^2\right), x^2 + y^2 \le 1$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ på Σ är valde så att $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_z > 0$.

2. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater (r, θ, φ) av $\mathbf{F} = r^5 \mathbf{e}_r + r\sin\theta \mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\sin\varphi \mathbf{e}_\varphi$.
Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur enhentssfären Σ definierat av ekvationen $r = 1$.

3. Ett vektorfält är givet i cylinderkoordinater (ρ, φ, z) av
$\mathbf{F} = \rho\cos\varphi \mathbf{e}_\rho + \rho \mathbf{e}_\varphi + az\cos\varphi \mathbf{e}_z$,där a är en konstant.
Bestäm ett värde på a så att $\mathbf{F}$ har en vektorpotential, åtminstone lokalt utanför $z-$axeln.
Potentialen behöver inte bestämmas.

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 3 i 5B1117, Matematik III

15 maj 2006, kl 14.00-15.00

Version vänster.

Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
Allmant gäller att mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat**.**

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.

Efternamn	Förnamn	Personnr

1. Beräkna $\iint_{\Sigma} rot(\mathbf{F}) \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma$, då $\mathbf{F} = \left(2z - y, x + \tan z, x^3 + y^3\right)$ och Σ är ytan som definieras av $z = \sin\left(1 - x^2 - y^2\right), x^2 + y^2 \le 1$. Enhetsnormalen $\hat{\mathbf{n}}$ på Σ är valde så att $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_z > 0$.

2. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater(r, θ, φ) av $\mathbf{F} = r^4\mathbf{e}_r - r\sin\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi$ **.**
Beräkna flödet av **F** ut ur enhentssfären Σ definierat av ekvationen $r = 1$.

3. Ett vektorfält är givet i cylinderkoordinater(ρ, φ, z) av
$\mathbf{F} = \rho\sin\varphi\mathbf{e}_\rho + \rho\mathbf{e}_\varphi + az\sin\varphi\mathbf{e}_z$,där a är en konstant.
Bestäm ett värde på a så att **F** har en vektorpotential, åtminstone lokalt utanför $z-$axeln.
Potentialen behöver inte bestämmas.

Lösningsförslag till KS3

Höger

1. Vi använder Stokes sats randen till Σ, $\partial\Sigma$ ges av $x^2+y^2=1, z=\tan(0)=0$, alltså enhetscirkeln i $xy-$planet. Vi får

$$\iint_{\Sigma} rot(\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_{\partial\Sigma}\left(z^2-y\right)dx+\left(x+\sin z\right)dy+\left(x^4+y^4\right)dz = \{z=0, dz=0 \text{ på } \partial\Sigma\} =$$

$$\oint_{x^2+y^2=1}\left(-ydx+xdy\right) = \begin{bmatrix} x=\cos t, dx=-\sin t dt \\ y=\sin t, dt=\cos t dt, t:0\to 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\left(-\sin t\left(-\sin t\right)+\cos t\left(\cos t\right)\right)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

2. Vi söker $\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$. Här är $\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{e}_r$. Vi

får $\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_r\,d\sigma = \oiint_{\Sigma}(r^5\mathbf{e}_r + r\sin\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi)\bullet\mathbf{e}_r\,d\sigma = \oiint_{\Sigma} r^5\,d\sigma =$

$= [\text{på } \Sigma \text{ är r=1}] = \oiint_{\Sigma} d\sigma =$ aren av enhentssfären=4π

3. F har en vektorpotential (lokalt) $\Leftrightarrow div(\mathbf{F})=0$.

Vi har ($h_\rho=1, h_\varphi=\rho, h_z=1$)

$$div(\mathbf{F}) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\rho\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\cdot az\cos\varphi)\right] = \frac{1}{\rho}\left[(2\rho\cos\varphi)+0+(\rho\cdot a\cos\varphi)\right]=0 \Leftrightarrow a=-2$$

Vänster

1. Vi använder Stokes sats, randen till Σ, $\partial\Sigma$ ges av $x^2+y^2=1, z=\sin(0)=0$, alltså enhetscirkeln i $xy-$planet. Vi får

$$\iint_{\Sigma} rot(\mathbf{F})\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oint_{\partial\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r} = \oint_{\partial\Sigma}\left(2z-y\right)dx+\left(x+\tan z\right)dy+\left(x^3+y^3\right)dz = \{z=0, dz=0 \text{ på } \partial\Sigma\} =$$

$$\oint_{x^2+y^2=1}\left(-ydx+xdy\right) = \begin{bmatrix} x=\cos t, dx=-\sin t dt \\ y=\sin t, dt=\cos t dt, t:0\to 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\left(-\sin t\left(-\sin t\right)+\cos t\left(\cos t\right)\right)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

2. Vi söker $\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma$. Här är $\hat{\mathbf{n}}=\mathbf{e}_r$. Vi

får $\oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oiint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_r\,d\sigma = \oiint_{\Sigma}(=r^4\mathbf{e}_r - r\sin\theta\mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\sin\varphi\mathbf{e}_\varphi)\bullet\mathbf{e}_r\,d\sigma = \oiint_{\Sigma} r^4\,d\sigma =$

$= [\text{på } \Sigma \text{ är r=1}] = \oiint_{\Sigma} d\sigma =$ aren av enhentssfären=4π

3. F har en vektorpotential (lokalt) $\Leftrightarrow div(\mathbf{F})=0$.

Vi har ($h_\rho=1, h_\varphi=\rho, h_z=1$)

$$div(\mathbf{F}) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\rho\sin\varphi)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\cdot az\sin\varphi)\right] = \frac{1}{\rho}\left[(2\rho\sin\varphi)+0+(\rho\cdot a\sin\varphi)\right]=0 \Leftrightarrow a=-2$$