KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i 5B1117, Matematik III
20 april 2006, kl 16.00-17.00

Version Höger.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
Allmant gäller att mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.

* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

- Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat**.**

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.

Efternamn	Förnamn	Personnr

1. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(3x + \cos z, 2xyz, e^y - xz^2\right)$ ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. En yta S i rummet ges i parameterform av $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$

där parametrarna u och v genomlöper $2 \le u \le 3, 0 \le v \le \pi$.
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (y, -x, 1)$ över ytan S i riktning $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_z > 0$,där $\hat{\mathbf{n}}$ är enhetsnormalen till S.

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = \left(2xy + e^y - \sin x, x^2 + 3y^2 + xe^y\right)$ är definierat i hela $xy-$planet. Undersök om **F** är konservativt, och bestäm i så fall en potential till **F.** Bestäm arbete som vektorfältet **F** utför längs kurvan $\dfrac{(x-1)^2}{100} + \dfrac{(y-10)^2}{10000} = 1$

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr 2 i 5B1117, Matematik III
20 april 2006, kl 16.00-17.00

Version Vänster.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
Allmant gäller att mindre räknefel som inte avsevärt förenklar uppgiften ger inget avdrag.
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

- Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din övningslärare med dina lösningsförslag

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.

Efternamn	Förnamn	Personnr

1. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = \left(x^2y + \sin z, \cos x, 3z - 2xyz\right)$ ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

2. En yta S i rummet ges i parameterform av $\begin{cases} x = v \\ y = u\cos v \\ z = u\sin v \end{cases}$

där parametrarna u och v genomlöper $1 \le u \le 2, 0 \le v \le \pi$.
Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (1, z, -y)$ över ytan S i riktning $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_x > 0$,där $\hat{\mathbf{n}}$ är enhetsnormalen till S.

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = \left(3x^2 + y^2 + ye^x, 2xy + e^x + \cos y\right)$ är definierat i hela $xy-$planet. Undersök om **F** är konservativt, och bestäm i så fall en potential till **F.** Bestäm arbete som vektorfältet **F** utför längs kurvan $\dfrac{(x-10)^2}{10000} + \dfrac{(y-1)^2}{100} = 1$

Lösningsförslag till KS1, 5B1117 matematik III
Vänster

1. Enhetssfären är sluten och vektorfältet $\mathbf{F} = \left(x^2y + \sin z, \cos x, 3z - 2xyz\right)$ är kontinuerligt deriverbar på och inuti Enhetssfären. Gauss sat kan användas

flödet ur Enhetsfären blir

$$\oiint_{x^2+y^2+z^2=1} \left(x^2y + \sin z, \cos x, 3z - 2xyz\right) \bullet d\mathbf{S} = \iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} div\left(\left(x^2y + \sin z, \cos x, 3z - 2xyz\right)\right) dxdydz =$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} (2xy + 0 + 3 - 2xy) dxdydz =$$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3dxdydz = 3\text{volym av enhetsklot}=3\frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

2. Flödet ges av

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \pm \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right) \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv$$

Här
$$\mathbf{r}(u,v) = (v, u\cos v, u\sin v) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, \cos v, \sin v) \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, -u\sin v, u\cos v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (u, \sin v, -\cos v), \text{där } 1 \le u \le 2, 0 \le v \le \pi$$

Eftersom $\hat{\mathbf{n}} \bullet \mathbf{e}_x = -\cos v$ >0, då skall plustecknet väljas i formeln, och vi får

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint_D \mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right) \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv = \left[\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right) = (1, u\sin v, -u\cos v)\right] =$$

$$\iint_D (1, u\sin v, -u\cos v) \bullet (u, \sin v, -\cos v) dudv = \int_{v=0}^{\pi} \int_{u=1}^{2} \left(u + u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)\right) dudv = \int_{v=0}^{\pi} \int_{u=1}^{2} (2u) dudv =$$

$$\int_0^{\pi} dv \int_1^2 udu = 2\pi\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = 3\pi$$

3. Med $\mathbf{F} = (P,Q)$ som är kontinuerligt deriverbar i hela planet, har vi
$\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y + e^x - \left(2y + e^x\right) = 0$. Eftersom Hela planet är enkelt sammanhängande så följer att **F** är konservativt.

En potential U till **F** får ur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + ye^x & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2xy + e^x + \cos y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow U = x^3 + xy^2 + ye^x + f(y), \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + e^x + f'(y)$$

Jämförelse med (2) ger att $f'(y) = \cos y \Rightarrow f(y) = \sin y + K$

Svar: $U(x,y) = x^3 + xy^2 + ye^x + \sin y$ (+ konstant) och arbete $= 0$ ty enkel och sluten kurvan och **F** konservativt

Höger

1. Enhetssfären är sluten och vektorfältet $\mathbf{F}=\left(3x+\cos z, 2xyz, e^{y}-xz^{2}\right)$ är kontinuerligt deriverbar på och inuti Enhetssfären. Gauss sat kan användas

flödet ur Enhetsfären blir

$$\oiint\limits_{x^2+y^2+z^2=1}\left(3x+\cos z, 2xyz, e^{y}-xz^{2}\right)\bullet d\mathbf{S}=\oiiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} div\left(\left(3x+\cos z, 2xyz, e^{y}-xz^{2}\right)\right)dxdydz=$$

$$\oiiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(3+2xz-2xz)dxdydz=$$

$$\oiiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}3dxdydz=3\text{volym av enhetsklot}=3\frac{4\pi}{3}=4\pi$$

2. Flödet ges av

$$\iint\limits_{S}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\pm\iint\limits_{D}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv$$

Här $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}=(\cos v,\sin v,0)\\ \dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(-u\sin v, u\cos v, 1)\end{cases}$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}=(\sin v,-\cos v,u),\text{där } 2\le u\le 3, 0\le v\le\pi$$

Eftersom $\hat{\mathbf{n}}\bullet\mathbf{e}_x=-\cos v$ >0, då skall plustecknet väljas i formeln, och vi får

$$\iint\limits_{S}\mathbf{F}\bullet\hat{\mathbf{n}}\,d\sigma=\iint\limits_{D}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right)\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dudv=\left[\mathbf{F}\left(\mathbf{r}(u,v)\right)=(u\sin v,-u\cos v,1)\right]=$$

$$\iint\limits_{D}(u\sin v,-u\cos v,1)\bullet(\sin v,-\cos v,u)dudv=\int\limits_{v=0}^{\pi}\int\limits_{u=2}^{3}\left(u+u\left(\cos^{2}v+\sin^{2}v\right)\right)dudv=\int\limits_{v=0}^{\pi}\int\limits_{u=2}^{3}(2u)dudv=$$

$$\int_{0}^{\pi}dv\int_{2}^{3}udu=2\pi\left[\frac{u^{2}}{2}\right]_{3}^{4}=5\pi$$

3. Med $\mathbf{F}$ = (P,Q) som är kontinuerligt deriverbar i hela planet, har vi $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x+e^{y}-\left(2x+e^{y}\right)=0$. Eftersom Hela planet är enkelt sammanhängande så följer att $\mathbf{F}$ är konservativt.

En potential U till $\mathbf{F}$ får ur

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=2xy+e^{y}-\sin x & (1)\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}=x^{2}+3y^{2}+xe^{y} & (2)\end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow U=x^{2}y+xe^{y}+\cos x+f(y),\Rightarrow\frac{\partial U}{\partial y}=x^{2}+xe^{y}+f'(y)$$

Jämförelse med (2) ger att $f'(y)=3y^{2}\Rightarrow f(y)=y^{3}+K$

Svar: $U(x,y)=x^{2}y+xe^{y}+\cos x+y^{3}$ (+ konstant) och arbete=0, ty enkel och sluten kurvan och $\mathbf{F}$ konservativt