KTH Matematik

Kontrollskrivning nr1 i 5B1117, Matematik III
23 mars 2006, kl 11.00-12.00

Version höger.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat**.**

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(x^2 + 2y\right) dxdy$, där D är det ändliga området som begränsas av parabeln $y = 3 - x^2$ och linjen $y = 2$.

2. Bestäm arean av den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellan planen $z = 1$ och $z = 3$.

3. Undersök om kroppen $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = e^{-2\left(x^2+y^2\right)}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ har ändlig volym, och bestäm i så fall volymen.

KTH Matematik

Kontrollskrivning nr1 i 5B1117, Matematik III
23 mars 2006, kl 11.00-12.00

Version vänster.
Inga hjälpmedel

Presentation av lösningarna bedöms med 0-3 poäng för var och en av uppgifterna enligt följande:
* **0p** Lösningen saknar helt förklarande text eller är mycket osammanhängande med ekvationer,formler och beräkningar utspridda över papperet.
* **1p** Lösningen har dåligt med förklarande text eller förklarande text som är tvetydig eller svår att förstå.
* **2p** Lösningen har förklarnade text till de flesta formler och beräkningar, men inte överallt där det skulle behövas,eller lösningen har förklarande text i så stor omfattning att tankegången drunknar i text.
* **3p** Lösningen har bra förklarande text till alla formler och beräkningar.

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.

1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \left(x^2 + 2y\right)dxdy$, där D är det ändliga området som begränsas av parabeln $y = 5 - x^2$ och linje $y = 1$.

2. Bestäm arean av den del av konen $z^2 = x^2 + y^2$ som ligger mellan planen $z = 2$ och $z = 4$.

3. Undersök om kroppen $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = e^{-3\left(x^2+y^2\right)}, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ har ändlig volym, och bestäm i så fall volymen.

Lösningsförslag till KS1, 5B1117 matematik III
Höger

1. Integrationsområdet kan skrivas $D=\left\{(x,y):-1\le x\le 1, 2\le y\le 3-x^2\right\}$. Då fås

$$\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy=$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{2}^{3-x^2}\left(x^2+2y\right)dy\right]dx=\int_{-1}^{1}\left[x^2y+y^2\right]_2^{3-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\left[x^2\left(3-x^2\right)+\left(3-x^2\right)^2-2x^2-4\right]dx=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(3x^2-x^4+x^4-6x^2+9-2x^2-4\right)dx=\int_{-1}^{1}(5-5x^2)dx=10\int_0^1(1-x^2)dx=\frac{20}{3}$$

Svar $\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy=\frac{20}{3}$

2. För den sökta arean gäller $z=f(x,y)$ med $z=\sqrt{x^2+y^2}$ och (x,y) i området $1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3$. Detta ger

Arean=

$$\iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=\iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\iint_{1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3}\sqrt{2}dxdy=$$

$$\sqrt{2}\,(\text{arean av området})=8\pi\sqrt{2}$$

Svar: $8\pi\sqrt{2}$

3. Vi söker $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\left(x^2+y^2\right)}dxdy$. Vi har

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-2\left(x^2+y^2\right)}dxdy=\left[\begin{cases}x=r\cos v\\ y=r\sin v\end{cases},\begin{cases}0\le r\le n\\ 0\le v\le 2\pi\end{cases},dxdx=rdrdv\right]=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{n}e^{-2r^2}rdrdv=$$

$$2\pi\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-2r^2}rdr=2\pi\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{e^{-2r^2}}{4}\right]_0^n=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left[1-e^{-2n^2}\right]=\frac{\pi}{2}$$

Svar: $\frac{\pi}{2}$

Vänster

1. Integrationsområdet kan skrivas $D=\left\{(x,y):-2\le x\le 2, 1\le y\le 5-x^2\right\}$. Då fås

$$\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy=$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\int_{1}^{5-x^2}\left(x^2+2y\right)dy\right]dx=\int_{-2}^{2}\left[x^2y+y^2\right]_1^{5-x^2}dx=\int_{-2}^{2}\left[x^2\left(5-x^2\right)+\left(5-x^2\right)^2-x^2-1\right]dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left(5x^2-x^4+x^4-10x^2+25-x^2-1\right)dx=\int_{-2}^{2}(24-6x^2)dx=12\int_0^2(4-x^2)dx=64$$

Svar $\iint_D \left(x^2+2y\right)dxdy=\frac{20}{3}$.

2. För den sökta arean gäller $z = f(x,y)$ med $z = \sqrt{x^2+y^2}$ och (x,y) i området $2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4$. Detta ger

Arean=

$$\iint\limits_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \iint\limits_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4} \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy = \iint\limits_{2\le\sqrt{x^2+y^2}\le 4} \sqrt{2}\,dxdy =$$

$$\sqrt{2}\left(\text{arean av området}\right) = 12\pi\sqrt{2}$$

Svar: $12\pi\sqrt{2}$

3. Vi söker $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-3\left(x^2+y^2\right)}dxdy$. Vi har

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-3\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \left[\begin{cases} x = r\cos v \\ y = r\sin v \end{cases}, \begin{cases} 0 \le r \le n \\ 0 \le v \le 2\pi \end{cases}, dxdx = rdrdv\right] = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^n e^{-3r^2} rdrdv =$$

$$2\pi \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-3r^2} rdr = 2\pi\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{e^{-3r^2}}{6}\right]_0^n = \frac{\pi}{3}\lim_{n\to\infty}\left[1-e^{-3n^2}\right] = \frac{\pi}{3}$$

Svar: $\frac{\pi}{3}$