1 Föreläsning 6

Från envariabelanalysen vet vi att

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \frac{df}{dt}(t)dt \quad \text{(analysens huvudsats.)}$$

Det följer att integralen av derivatan av f på intervalet $[a, b]$ bara beror på intervallets ändpunkter a och b. Idag ska vi generalisera detta till $\mathbb{R}^3$.

1.1 Gauss sats

Sats 1 *Låt V vara ett område i $\mathbb{R}^3$ och låt S beteckna randytan till V. Antag att $\overline{A}$ är ett kontinuerligt deriverbart vektorfält i $\overline{V}$ (slutna höljet av V, dvs $V \cup S$). Då gäller att*

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV \tag{1}$$

där $\hat{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen.

Bevis. Båda sidorna i (1) är linjära med avseende på $\overline{A}$. Alltså räcker det att bevisa satsen för vektorfält sådana att

$$\overline{A} = A_z \hat{z}\,.$$

a). Först betraktar vi ett område V som ges av $g(x, y) < z < f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, där Ω är ett begränsat område i $\mathbb{R}^2$ med rand $\partial\Omega$. Randen av V består av locket $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, som betecknas med S_2, botten $z = g(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ och mantelytan $g(x, y) \leq z \leq f(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega$. S_1 och S_2 är funktionsytorna och de utåtriktade enhetsnormalerna med avseende på V på dessa ytor är

$$\hat{n}_1 = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

och

$$\hat{n}_2 = \frac{(g_x, g_y, -1)}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}}\,.$$

Vi behöver inte det exakta uttrycket för enhetsnormalen $\hat{n}_3$ på S_3. Det som är viktigt för oss är att $\hat{n}_3$ är ortogonal mot $\hat{z}$. Enligt föreläsning 5 är ytelementen på funktionsytorna S_1 och S_2 följande

$$dS_1 = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

och

$$dS_2 = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dxdy\,.$$

Så vänsterledet i (1) är lika med

$$V.L. = \int\int_{S_1} A_z \hat{z} \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \int\int_{S_2} A_z \hat{z} \cdot \hat{n}_2 dS_2 + \int\int_{S_3} A_z \hat{z} \cdot \hat{n}_3 dS_3 \,.$$

Sista integralen är 0 på grund av att $\hat{n}_3$ är ortogonal mot $\hat{z}$. Nu använder vi uttrycken för $\hat{n}_1$, $\hat{n}_2$, dS_1 och dS_2 och finner att

$$\begin{aligned} V.L. &= \int\int_{\Omega} A_z(x,y,f(x,y)) \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy \\ &- \int\int_{\Omega} A_z(x,y,g(x,y)) \frac{1}{\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}} \sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\, dxdy \\ &= \int\int_{\Omega} (A_z(x,y,f(x,y)) - A_z(x,y,g(x,y)))dxdy \,. \end{aligned}$$

Nu räknar vi ut högerledet i (1):

$$H.L. = \int\int\int_V \nabla \overline{A} dxdydz = \int\int\int_V \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz \,.$$

Med hjälp av itererad integration får vi att den sista integralen är lika med

$$\int\int_{\Omega} \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz \,.$$

Nu använder vi insättningsformeln och får

$$H.L. = \int\int_{\Omega} (A_z(x,y,f(x,y)) - A_z(x,y,g(x,y)))dxdy.$$

Alltså sammanfaller högerledet med vänsterledet och satsen är bevisad för ovanstående fall.

Om V är ett allmänt område, så kan det delas upp i små områden med samma form som i a). Resultatet i a) används sedan för varje delområde. Summerar vi sedan över dessa delområden följer resultatet för ett allmänt område.

Ex. 1. Antag att V definieras i cylindriska koordinater av $\rho < 1$, $-1 < z < 1$. Låt S vara randen till V. Bestäm flödesintegralen av vektorfältet $\overline{A} = z\hat{z}$ genom S. Normalen är utåtriktad.

Lösn. Vi använder Gauss sats

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dxdydz = \int\int\int_V dxdydz = 2\pi \;\; \text{(volymen av } V\text{)}.$$

Ex. 2. Bestäm flödet av det elektriska fältet $\overline{A} = \hat{r}/r^2$ ut genom olika slutna ytor.

Lösn. För $r \neq 0$ har vi att

$$\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{1}{r^2}\Big) = 0\,.$$

Vi använder följande resultat vilket beräknades i föreläsning 5:

$$\int\!\!\int_{S_R} \overline{A} \cdot \hat{r} dS = 4\pi \tag{2}$$

där S_R är sfären med radien R. Betrakta två fall.

a). S omsluter ej origo. Om vi betecknar med V det område som S omsluter så innehåller V ej origo och vektorfältet $\overline{A}$ är kontinuerligt deriverbart i $\overline{V}$. Så Gauss sats kan användas:

$$\int\!\!\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\!\!\int\!\!\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV = 0\,.$$

b). S omsluter origo. Nu innehåller området som omsluts av S origo. I origo har vektorfältet en singularitet (ej kontinuerligt). Så Gauss sats kan ej tillämpas direkt. Vi gör så här istället. Låt S_ε vara en sfär med radien ε med centrum i origo, där ε är ett litet positivt tal. Vi ska beteckna med V området mellan S och S_ε. Randen till V består av två ytor S och S_ε. Vektorfältet $\overline{A}$ har inga singulariteter i $\overline{V}$. I uppgiften krävs att normalen på S är utåtriktad, så på S_ε väljer vi normalen till $-\hat{r}$. Nu kan Gauss sats användas och vi får:

$$\int\!\!\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS + \int\!\!\int_{S_\varepsilon} \overline{A} \cdot (-\hat{r}) dS = \int\!\!\int\!\!\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV = 0\,.$$

Med hjälp av (2) slutför vi beräkningen enligt

$$\int\!\!\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\!\!\int_{S_\varepsilon} \overline{A} \cdot \hat{r} dS = 4\pi\,.$$

Ex. 3. (*Ytan är ej sluten.*) Beräkna flödet av

$$\overline{A} = (1, 0, z)$$

genom halvsfären

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

i riktning: $\hat{n} \cdot \hat{z} \geq 0$.

Lösn. Observera att S ej är en sluten yta och att vi endast kan tillämpa Gauss sats för slutna ytor (dvs ytor som är rand till ett område).

Först sluter vi ytan S med

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1, z = 0\}\,.$$

Då omsluter S och S_1 volymen V där

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + (y-1)^2 + z^2 \le 1, z \ge 0\}$$

är ett halvklot. Nu använder vi Gauss sats:

$$\int\int_{S+S_1} \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV\,.$$

Eftersom den utåtriktade normalen på S_1 är $-\hat{z}$ har vi att

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int_{S_1} \overline{A} \cdot \hat{z} dS + \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV\,.$$

Det följer att $\overline{A} \cdot \hat{z} = z$ och då $z = 0$ på S_1 är den första integralen i högra ledet noll. Så

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV = \int\int\int_V dV$$
$$= \text{Volymen av enhetshalvklotet} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

Ex. 4. (*En lång singularitet (linjekälla).*) Bestäm flödesintegralen av vektorfältet $\overline{A} = \hat{\rho}/\rho$ (den elektriska fältstyrkan kring en likformigt laddad tråd) genom ytan S som ges av $z = x^2 + y^2 - 1$, $0 \le z \le 1$. Orienteringen väljes enligt $\hat{n} \cdot \hat{z} < 0$.

Lösn. Här har vi två svårigheter: fältet har singulariteter längs hela z-axeln och ytan är ej sluten. Vi definierar V i cylindriska koordinater som $1 \le \rho \le \sqrt{z+1}$, $0 \le z \le 1$. (Rita området!) Randen till V består av ytan S, ytan S_1: $\rho = 1$, $0 \le z \le 1$, och ytan S_2: $z = 1$, $1 \le \rho \le \sqrt{2}$. Vektorfältet $\overline{A}$ har inte någon singularitet i V och vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\int\int_{S+S_1+S_2} \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV\,. \tag{3}$$

Nu använder vi att $\nabla \cdot \overline{A} = 0$ (Kontrollera!) och att de utåtriktade (m.a.p. V) normalerna på S_1 och S_2 är $-\hat{\rho}$ respektive $\hat{z}$. Så (3) medför

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = -\int\int_{S_1} \overline{A} \cdot -\hat{\rho} dS - \int\int_{S_2} \overline{A} \cdot \hat{z} dS = \int\int_{S_1} \frac{1}{\rho} dS\,. \tag{4}$$

Här används att $\overline{A}$ är ortogonal mot $\hat{z}$ på S_2. Eftersom $\rho = 1$ på S_1 medför (4) att

$$\int\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int\int_{S_1} dS = \text{Arean av } S_1 = 2\pi.$$

Ex. 5. (*Strömning, en tolkning av divergensen.*) Låt $\overline{A}$ vara en stationär strömning i ett område. Vi tar en punkt y och ett klot $K_\varepsilon(y)$ med radie ε och medelpunkt y. Vi antar att ε är ett litet positivt tal. Gauss sats ger

$$\int\int\int_{K_\varepsilon} \nabla \cdot \overline{A} dV = \int\int_{\partial K_\varepsilon(y)} \overline{A} \cdot \hat{n} dS$$

där $\partial K_\varepsilon(y)$ är randen till $K_\varepsilon(y)$. Vänsterledet kan approximeras med

$$(\text{Volymen av } K_\varepsilon(y)) \times (\nabla \cdot \overline{A}(y)) = \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 \nabla \cdot \overline{A}(y)\,.$$

Så

$$\nabla \cdot \overline{A}(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} \overline{A} \cdot \hat{n} dS\,.$$

Vi inser att högerledet kan tolkas som den mängd av mediet som strömmar i punkten y normerat med volymen av klotet. Så då kan $\nabla \cdot \overline{A}$ tolkas som strömningskälltäthet i punkten y eller som den produktion av det strömmande mediet som sker i punkten y.

1.2 Kontinuitetsekvationen

Betrakta ett strömmande medium i ett område Ω. Låt $q(\overline{r}, t)$ vara densiteten, $\overline{u}(\overline{r}, t)$ –strömninghastigheten, $p(\overline{r}, t)$ –produktionen av mediet (i punkten $\overline{r}$ och vid tid t).

Låt V vara ett godtyckligt klot i Ω med randen S. Då kan vi skriva

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \int\int\int_V q dV \text{ (ökning av substansen i } V)\\
&= \int\int\int_V p dV \text{ (produktionen av substansen i } V)\\
&- \int\int_S q\overline{u} \cdot n dS \text{ (utflöde av substansen i } V)\,.
\end{aligned}$$

Med hjälp av derivation under integraltecken får vi att

$$\frac{d}{dt} \int\int\int_V q dV = \int\int\int_V \frac{\partial}{\partial t} q dV\,.$$

Vidare ger Gauss sats

$$\int\int_S q\overline{u} \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V \nabla \cdot (q\overline{u}) dV\,.$$

Slutligen fås

$$\int\int\int_V \Big(\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\overline{u}) - p\Big) dV = 0$$

för varje klot V som ligger i Ω. Detta medför att

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\overline{u}) - p = 0\,.$$

Den här ekvationen kallas kontinuitetsekvationen. Den är grundläggande vid alla studier av strömning. Om densiteten q är konstant så får vi att

$$\nabla \cdot \overline{u} = \frac{p}{q} = 0\,.$$