1 Föreläsning 4

1.1 Gradienten i kroklinjiga koordinatsystem

Sats 1

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \tag{1}$$

i sfäriska koordinater;

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z} \tag{2}$$

i cylindriska koordinater.

Bevis. I kartesiska koordinater har vi att

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}\,.$$

Nu skriver vi om detta i ON-basen $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$:

$$\nabla\Phi = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\,.$$

Vi kan hitta koefficienterna A_r, A_θ, A_φ med hjälp av skalärmultiplikation med $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$. Vi har

$$A_r = \nabla\Phi\cdot\hat{r} = \frac{1}{h_r}\nabla\Phi\cdot\frac{d\overline{r}}{dr} = \frac{1}{h_r}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\Big) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

För att kontrollera sista likheten använder man kedjeregeln. Likadant,

$$A_\theta = \nabla\Phi\cdot\hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\nabla\Phi\cdot\frac{d\overline{r}}{d\theta} = \frac{1}{h_\theta}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}$$

och

$$A_\varphi = \nabla\Phi\cdot\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi}\nabla\Phi\cdot\frac{d\overline{r}}{d\varphi} = \frac{1}{h_\varphi}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\Big) = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}.$$

Dessa beräkningar medför (1). Likheten (2) bevisas på samma sätt.

Ex. a). Med hjälp av (1) får man

$$\nabla r = \hat{r}\,, \tag{3}$$

$$\nabla\theta = \frac{1}{r}\hat{\theta}\,,$$

och

$$\nabla\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\hat{\varphi}$$

b). Med hjälp av (2) får man

$$\nabla \rho = \hat{\rho}\,,$$

$$\nabla \varphi = \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}$$

och

$$\nabla z = \hat{z}\,.$$

Ex. Bestäm en potential till $-\hat{r}/r^2$.
Lösn. Man måste lösa ekvationen

$$\nabla \Phi = -\frac{\hat{r}}{r^2}$$

eller enligt (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} = -\frac{\hat{r}}{r^2}\,.$$

Man kan skriva detta som tre skalära ekvationer

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\,, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0\,, \quad \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Från de sista två ekvationerna får man att Φ bara beror på r, dvs $\Phi = \Phi(r)$. Nu får man från första ekvationen att $\Phi(r) = 1/r$.

1.2 Divergensen i kroklinjiga koordinatsystem

Sats 2 (i) *Låt*

$$\overline{A} = A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\,.$$

Då är

$$\nabla \cdot \overline{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi \tag{4}$$

i sfäriska koordinater.

(ii) *Låt*

$$\overline{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}\,.$$

Då är

$$\nabla \cdot \overline{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}A_z \tag{5}$$

i cylindriska koordinater.

Bevis. (ii) Först räknar vi ut divergensen av ortvektorerna $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ och $\hat{z}$. Med hjälp av definitionen av divergensen har vi

$$\nabla \cdot \hat{\rho} = \nabla \cdot \Big(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 0\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{\rho}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{\rho}\Big) = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3} = \frac{1}{\rho} \tag{6}$$

Likadant

$$\nabla \cdot \hat{\varphi} = \nabla \cdot \Big(\frac{-y}{\rho}, \frac{x}{\rho}, 0\Big) = 0 \tag{7}$$

och

$$\nabla \cdot \hat{z} = \nabla \cdot (0, 0, 1) = 0. \tag{8}$$

Dessutom kan man kolla att

$$\nabla \cdot (\Phi \overline{B}) = \nabla \Phi \cdot \overline{B} + \Phi \nabla \cdot \overline{B}$$

för ett skalärfält Φ och ett vektorfält $\overline{B}$. Vi använder den här formeln för att få

$$\nabla \cdot (A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z}) = \nabla A_\rho \cdot \hat{\rho} + A_\rho \nabla \cdot \hat{\rho}$$
$$+ \nabla A_\varphi \cdot \hat{\varphi} + A_\varphi \nabla \cdot \hat{\varphi} + \nabla A_z \cdot \hat{z} + A_z \nabla \cdot \hat{z} =$$

Nu använder vi formeln (2) för gradienten i cylindriska koordinater och formlerna (6)–(8)

$$= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + A_\rho \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + A_\varphi 0 + \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z 0.$$

Man kan kontrollera att detta sammanfaller med högerledet av (5).

Likheten (4) bevisas likadant.

Ex. a). Bestäm alla $\Phi = f(r)$ som uppfyller Laplaces ekvation

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Lösn. Enligt (1) har vi att

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{r} = \frac{df}{dr}\hat{r}.$$

Nu får vi med hjälp av sats 2(i) att

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2 \frac{df}{dr}\Big).$$

Därför kan man skriva om (9) som

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2 \frac{df}{dr}\Big) = 0.$$

Detta medför att

$$r^2\frac{df}{dr} = a$$

eller

$$\frac{df}{dr} = \frac{a}{r^2}$$

eller

$$f(r) = -\frac{a}{r} + b$$

där a och b är två godtyckliga konstanter.

1.3 Rotationen i kroklinjiga koordinater

Sats 3

$$\nabla \times (A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{10}$$

i sfäriska koordinater och

$$\nabla \times (A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{11}$$

i cylindriska koordinater.

Bevis. Om Φ är ett skalärfält så

$$\nabla \times (\Phi\overline{A}) = (\nabla\Phi) \times \overline{A} + \Phi(\nabla \times \overline{A}). \tag{12}$$

Låt $\overline{A} = A_r\hat{r}$. Om man använder (12) och att $\nabla r = \hat{r}$ (se (3)) så får man

$$\nabla \times (A_r\hat{r}) = \nabla \times (A_r\nabla r) = \nabla A_r \times \nabla r + A_r\nabla \times (\nabla r) = \nabla A_r \times \nabla r + A_r\nabla \times (\nabla r).$$

Eftersom rotationen av gradienten är 0 (se öv.1.6 a) i exempelsamlingen) är högerledet

$$\begin{aligned} &= \nabla A_r \times \nabla r = \Big(\frac{\partial A_r}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\hat{\varphi}\Big) \times \hat{r} \\ &= -\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\hat{\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\hat{\theta}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Högerledet i (10) är lika med (om $A_\theta = A_\varphi = 0$)

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}r\hat{\theta} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}r\sin\theta\hat{\varphi}\Big) \tag{14}$$

Jämför vi (13) och (14) ser vi att (10) gäller för $\overline{A} = A_r \hat{r}$.

Fallen $\overline{A} = A_\theta \hat{\theta}$ och $\overline{A} = A_\varphi \hat{\varphi}$ betraktas likadant. Nu, summerar man dessa tre fall får man (10).

Formeln (11) kan bevisas på samma sätt.

Ex. *Tentamen TATM 41 Vektoranalys 4 juni 1999, uppg.1.* Bestäm ett tal a sådant att vektorfältet

$$\overline{A} = (2\rho z + \rho^2 \sin\varphi)\hat{\rho} + a\rho^2 \cos\varphi \hat{\varphi} + (\rho^2 + z)\hat{z}$$

har en potential och ange denna.

Lösning. $\overline{A}$ har potential om $\nabla \times \overline{A} = \overline{0}$. Med hjälp av (11) har vi att

$$\begin{aligned}\nabla \times \overline{A} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2\rho z + \rho^2 \sin\varphi) & \rho a\rho^2 \cos\varphi & (\rho^2 + z) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho}(3a\rho^2 \cos\varphi - \rho^2 \cos\varphi)\hat{z}\,.\end{aligned}$$

Så man måste ha att $a = 1/3$ för att rotationen ska bli 0. Ekvationen för potentialen blir

$$\nabla\Phi = (2\rho z + \rho^2 \sin\varphi)\hat{\rho} + \frac{1}{3}\rho^2 \cos\varphi\hat{\varphi} + (\rho^2 + z)\hat{z}\,.$$

Nu använder vi (2) och skriver om detta som tre skalära ekvationer

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 2\rho z + \rho^2 \sin\varphi\,, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \frac{1}{3}\rho^2 \cos\varphi\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \rho^2 + z\,. \tag{17}$$

Först löser vi ekvationen (15). Vi får

$$\Phi = \rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3 \sin\varphi + f(\varphi, z)\,.$$

Nu använder vi detta för att lösa (16):

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \frac{1}{3}\rho^2 \cos\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi} = \frac{1}{3}\rho^2 \cos\varphi$$

eller $f(\varphi, z) = g(z)$. Alltså

$$\Phi = \rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3 \sin\varphi + g(z)\,.$$

Nu använder vi detta för att lösa (17):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \rho^2 + \frac{dg(z)}{dz} = \rho^2 + z$$

eller

$$g(z) = \frac{1}{2} z^2 .$$

Svar: $a = 1/3$; potentialen till $\overline{A}$ är $\rho^2 z + \frac{1}{3}\rho^3 \sin\varphi + \frac{z^2}{2}$.