P Potensserier

Med en **potensserie** menar vi en serie av typen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, där $c_0, c_1, c_2, \ldots$ är givna (reella eller komplexa) konstanter, s.k. koefficienter, och där x är en (reell eller komplex) variabel. För varje enskilt värde på x får vi en numerisk serie, som kan vara konvergent eller divergent.

P.1. Sats (Existens av och beräkning av konvergensradie). *Till varje potensserie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

finns ett entydigt bestämt R, $0 \le R \le \infty$, kallat ***konvergensradie****, sådant att*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\; \textit{är} \; \begin{cases} \textit{absolutkonvergent om } |x| < R \\ \textit{divergent om } |x| > R \end{cases}$$

Om $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existerar, så säger det s.k. ***rotkriteriet*** *att*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}. \tag{P.1}$$

Om $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ existerar, så säger det s.k. ***kvotkriteriet*** *att*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{R}. \tag{P.2}$$

Om något av dessa gränsvärden är 0 eller ∞ ska det tolkas som att $R = \infty$ respektive $R = 0$.

Bevis av Sats P.1 i ett specialfall. Vi ska här visa specialfallet att om $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existerar, så finns R med de önskade egenskaperna och sambandet (P.1) gäller; det allmänna fallet utelämnas.

Antag att $G = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ existerar, och att $0 < G < \infty$. Välj (ett mindre tal) M och (ett större tal) S sådana att $0 < M < G < S < \infty$. Då finns ett heltal N (som beror på M och S) sådant att

$$M \le \sqrt[n]{|c_n|} \le S, \quad \text{d.v.s.} \quad M^n \le |c_n| \le S^n, \quad \text{för alla } n \ge N. \tag{P.3}$$

För fixt x med $|x| = r$ gäller därför

$$(Mr)^n \le |c_n x^n| \le (Sr)^n \quad \text{för alla } n \ge N.$$

Om nu $Mr > 1$ får vi alltså att talföljden $\{c_n x^n\}_{n=N}^{\infty}$ är obegränsad, så potensserien är divergent; om å andra sidan $Sr < 1$ är $\sum_{n=N}^{\infty} |c_n x^n| \le \sum_{n=N}^{\infty} (Sr)^n = \frac{(Sr)^N}{1 - Sr}$, och därmed är potensserien absolutkonvergent.

Alltså, för varje par av tal M och S med $0 < M < G < S < \infty$ gäller att potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\; \text{är} \; \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |x| < 1/S \\ \text{divergent om } |x| > 1/M \end{cases}$$

Men om $|x| < 1/G$ finns S med $|x| < 1/S < 1/G$, och om $|x| > 1/G$ finns M med $|x| > 1/M > 1/G$, och därför gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \;\; \text{är} \; \begin{cases} \text{absolutkonvergent om } |x| < 1/G \\ \text{divergent om } |x| > 1/G \end{cases}$$

och därmed uppfyller $R = 1/G$ egenskaperna i satsen.

Om $G = 0$ kan vi hitta S (men inte M), och potensserien är absolutkonvergent när $|x| < 1/S$, men eftersom $S > 0$ kan göras hur liten som helst är potenssserien alltså absolutkonvergent för alla x.

Om $G = \infty$ kan vi hitta M (men inte S), och potensserien är divergent när $|x| > 1/M$, men eftersom $M < \infty$ kan göras hur stor som helst är potenssserien alltså divergent för alla $x \neq 0$. □

P.2. Anmärkning. Variabeln x kan mycket väl vara komplex, därav namnet konvergens**radie**.

P.3. Anmärkning. I själva verket kan vårt resonemang i beviset genomföras oförändrat om vi i (P.3) endast kräver att olikheten $M \leq \sqrt[n]{|c_n|}$ ska gälla för oändligt många $n \geq N$ (till skillnad från alla $n \geq N$). Detta är samma sak som att säga att $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = G$ (till skillnad från $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = G$), där lim sup, *limes superior*, *övre gränsvärdet*, är det största möjliga gränsvärdet av någon delföljd. Detta gränsvärde existerar alltid, och $R = 1/G$, alltid.

Observera att satsen inte säger något om konvergensen då $|x| = R$. I själva verket kan allt hända; se Exempel P.4 nedan. I tillämpningarna är de reella randpunkterna $x = \pm R$ dock sällan av intresse. (I komplex analys är dock det samlade beteendet över hela randcirkeln intressant.)

P.4. Exempel. De tre potensserierna

$$s_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad s_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{och} \quad s_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

har alla konvergensradie $R = 1$, vilket enklast ses med kvotkriteriet; t.ex. får vi för s_2

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \to 1 = \frac{1}{R} \quad \text{då } n \to \infty.$$

Alltså är serierna absolutkonvergenta för $|x| < 1$ och divergenta för $|x| > 1$. Om $x = \pm 1$ inträffar olika saker: serie s_0 är divergent i båda punkterna, serie s_2 är (absolut)konvergent i båda, medan serie s_1 är divergent i $x = 1$ men konvergent (dock ej absolutkonvergent) i $x = -1$. ||

P.5. Exempel. För att undersöka om den positiva serien

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} 2^{-n}$$

är konvergent kan vi bestämma konvergensradien R för potensserien

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

och sedan se efter om $x = 1/2$ ligger innanför eller utanför. Rotkriteriet verkar enklast att använda i detta fall:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right) \to \exp 1 = e \quad \text{då } n \to \infty,$$

så $R = 1/e$, och eftersom $1/2 > 1/e$ är serien divergent. ||

P.6. Exempel. För att bestämma konvergensradien för potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} x^{3n}$ kan vi istället betrakta potensserien $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} t^n$, där $t = x^3$. Kvotkriteriet ger för t-serien

$$\begin{aligned}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| &= \frac{(n+1)^2(2n)!}{n^2(2(n+1))!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{n^2(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})} \to 0 \quad \text{då } n \to \infty,\end{aligned}$$

så $R = \infty$, d.v.s. t-serien är konvergent för alla t, och därmed är den ursprungliga x-serien konvergent för alla x. $\|$

Att multiplicera och/eller dividera en potensseries koefficienter med polynom påverkar inte konvergensradien, vilket beror på att $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|} = 1$ för alla nollskilda polynom p. Vi preciserar:

P.7. Proposition. *Om p och q är polynom (båda skilda från nollpolynomet), så har potensserierna $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} c_n x^n$ samma konvergensradie.*

Speciellt har alla potensserier av formen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{q(n)} x^n$ konvergensradie 1.

Vi har nu kommit till huvudresultatet för potensserier:

P.8. Sats (Termvis derivering och integrering). *Antag att*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

har konvergensradie $R > 0$. Då är f kontinuerlig och deriverbar i $]-R, R[$, och

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots$$

och

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \frac{c_3 x^4}{4} + \dots,$$

båda då $|x| < R$. Potensserierna för derivatan och integralen har också konvergensradie R.

För att visa denna centrala sats behöver vi en teknisk hjälpsats.

P.9. Hjälpsats. *Om $|a| \le r$ och $|x| \le r$, så gäller*

$$|x^n - a^n| \le n r^{n-1} |x - a|, \quad n = 1, 2, \dots \tag{P.4}$$

Om dessutom $x \ne a$ så gäller också

$$\left| \frac{x^n - a^n}{x - a} - n a^{n-1} \right| \le \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} |x - a|, \quad n = 2, 3, \dots \tag{P.5}$$

Bevis. Beviset bygger på identiteten

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2 a^{n-3} + x a^{n-2} + a^{n-1}) \tag{P.6}$$

som inses genom direkt utveckling av högerledet. Eftersom det finns precis n termer i den högra parentesen och alla termer där har belopp högst r^{n-1} får vi

$$|x^n - a^n| \le |x - a|(|x|^{n-1} + |x|^{n-2}|a| + \dots + |x||a|^{n-2} + |a|^{n-1}) \le |x - a| \cdot n r^{n-1},$$

och därmed är (P.4) bevisad.

Använder vi sedan (P.6) då $x \neq a$ och (P.4) upprepade gånger får vi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1}\right| &= \left|x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1} - na^{n-1}\right| \\
&= |(x^{n-1} - a^{n-1}) + (x^{n-2} - a^{n-2})a + \ldots + (x-a)a^{n-2}| \\
&\leq |x^{n-1} - a^{n-1}| + |x^{n-2} - a^{n-2}||a| + \ldots + |x-a||a|^{n-2} \\
&\leq |x-a| \cdot (n-1)r^{n-2} + |x-a| \cdot (n-2)r^{n-3}r + \ldots + |x-a|r^{n-2} \\
&= |x-a|((n-1) + (n-2) + \ldots + 1)r^{n-2} \\
&= |x-a|\frac{n(n-1)}{2}r^{n-2},
\end{aligned}$$

och därmed är beviset klart. □

Bevis av Sats P.8. Proposition P.7 medför genast att potensserierna $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ också har konvergensradie R.

Fixera a med $|a| < R$. Välj sedan r så att $|a| < r < R$; då ger Proposition P.7 att serierna $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1}$ och $\sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}$ är konvergenta. Om $|x| < r$ får vi enligt Hjälpsats P.9

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x^n - a^n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n||x^n - a^n| \\
&\leq |x-a| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| n r^{n-1},
\end{aligned}$$

där den sista serien konvergerar och summan är oberoende av x. Alltså får vi att $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$, så f är kontinuerlig i a.

Om $x \neq a$ får vi också, återigen från Hjälpsats P.9,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \sum_{n=1}^{\infty} c_n n a^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1}\right)\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \left|\frac{x^n - a^n}{x-a} - na^{n-1}\right| \\
&\leq |x-a| \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2},
\end{aligned}$$

där den sista serien, som är oberoende av x, konvergerar, så

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n a^{n-1}.$$

Beviset för termvis integrering lämnas som Övning P.1. □

Genom att använda termvis derivering upprepade gånger och sedan sätta $x = 0$, får vi

P.10. Följdsats. *Om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ har konvergensradie $R > 0$, så har f kontinuerliga derivator av alla ordningar i $|x| < R$, och $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Speciellt är potensseriens koefficienter entydigt bestämda av potensseriens summa.

P.11. Exempel. Den geometriska serien kan ju beräknas:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Termvis derivering av denna ger

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x| < 1,$$

och därmed kan vi t.ex. räkna ut följande numeriska serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{3})^{n-1} = \Big/ x = \frac{1}{3},\ \text{innanför konvergensradien} \Big/ = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}.$$

Å andra sidan ger termvis integrering av den geometriska serien att

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x), \qquad |x| < 1,$$

och därmed att t.ex.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \Big/ \text{Byt index, } n = k+1 \Big/ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{k+1}}{k+1} = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

Om man, som en approximation till $\ln 2$, tar de tio första termerna, säg, får man

$$\ln 2 - \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n2^n},$$

så

$$\ln 2 \approx \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{10\cdot 2^{10}},$$

där felet i approximationen, svansen $\displaystyle\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$, kan uppskattas t.ex. så här:

$$0 < \sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{11}\sum_{n=11}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{11\cdot 2^{11}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{11\cdot 2^{10}} < 10^{-4}.$$

Av detta kan man dra slutsatsen att $\ln 2 \approx 0{,}693$ med tre korrekta decimaler. ||

Lösning av differentialekvationer med hjälp av potensserier

P.12. Exempel. Ett sätt att härleda potensserien för exponentialfunktionen e^x är att utnyttja att denna funktion är den entydiga lösningen till differentialekvationen

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Ansätt därför $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Innanför (den ännu okända) konvergensradien R gäller

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n,$$

så $y' = y$ om och endast om $(n+1)c_{n+1} = c_n$ för alla $n \geq 0$, och eftersom $c_0 = y(0) = 1$ får vi

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{c_0}{1} = \frac{1}{1}, \quad c_2 = \frac{c_1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \ldots, \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Alltså blir $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, och konvergensradien $R = \infty$, ty $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$.

Den termvisa deriveringen är alltså tillåten för alla x, och därmed har vi visat att $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. ||

P.13. Exempel. Vi ansätter en potensserielösning $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ till differentialekvationen

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2,$$

och får alltså innanför (den ännu okända) konvergensradien R

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \quad \text{och} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2},$$

och därför

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y &= (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 2c_n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)(n+1)c_{n+2} - (n^2+n-2)c_n\big) x^n \\
&= 0, \qquad |x| < R,
\end{aligned}$$

där vi i steg * har bytt summationsindex från n till $n+2$ i den första serien så att vi även där får x^n; observera också att summorna $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n$ lika gärna kan börja i $n = 0$, eftersom de extra termerna ändå är 0.

Vår potensserie löser alltså differentialekvationen då $|x| < R$ precis då alla koefficienter är 0, och detta tillsammans med begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n^2+n-2)c_n &= 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\
c_0 = y(0) &= 1 \\
c_1 = y'(0) &= 2
\end{aligned}$$

d.v.s.

$$c_{n+2} = \frac{n^2+n-2}{(n+2)(n+1)}c_n = \frac{(n+2)(n-1)}{(n+2)(n+1)}c_n = \frac{n-1}{n+1}c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad c_0 = 1, \quad c_1 = 2.$$

Vi får således för jämna index

$$c_2 = \frac{-1}{1}c_0 = -1, \quad c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}, \quad c_6 = \frac{3}{5}c_4 = -\frac{1}{5}, \quad \ldots, \quad c_{2n} = -\frac{1}{2n-1}, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

och för udda index

$$c_3 = \frac{0}{2} c_1 = 0, \quad \text{därmed } c_3 = c_5 = c_7 = \ldots = 0,$$

så

$$y = 2x - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} = 1 + 2x - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} - \ldots, \qquad |x| < R.$$

Genom att sätta $t = x^2$ ser vi att konvergensradien m.a.p. t är 1 och därmed att $R = \sqrt{1} = 1$. I intervallet $|x| < 1$ är alltså ovanstående räkningar giltiga, och därmed är vår potensserie en lösning till differentialekvationen i detta intervall. ||

⋆ Övning P.1. Bevisa den del av Sats P.8 som handlar om termvis integrering genom att använda resultatet för termvis derivering.

⋆ Övning P.2. Härled potensserien för $\cos x$ genom att använda att denna funktion är den entydiga lösningen till

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Härled sedan potensserien för $\sin x$. Konvergensradier?

⋆ Övning P.3. Härled potensserien för $\ln(1+x)$ genom att integrera potensserien för dess derivata.

⋆ Övning P.4. Härled potensserien för $\arctan x$.

⋆ Övning P.5. Härled potensserien för $(1+x)^\alpha$ genom att lösa differentialekvationen

$$(1+x)y' = \alpha y, \quad y(0) = 1.$$

⋆ Övning P.6. Bestäm en potensserie som löser differentialekvationen

$$y'' + 2xy' + y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Räkna speciellt ut koefficienterna $c_0, \ldots, c_7$.

Potensserier för elementära funktioner (Maclaurin-serier)

I föregående avsnitt härleddes nedanstående serier i exempel eller i övningar. Alla dessa serier är helt enkelt de vanliga Maclaurin-utvecklingarna utsträckta i oändlighet. Vi sammanfattar:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots, && R = \infty,\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, && R = \infty,\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, && R = \infty,\\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} &&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, && R = 1,\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} &&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots, && R = 1,\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \ldots, && R = 1.
\end{aligned}$$

P.14. Exempel. Med $-x^2$ i stället för x i exponentialutvecklingen, som ju har oändlig konvergensradie, får vi (där * indikerar termvis integrering):

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx \stackrel{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Eftersom denna numeriska serie är alternerande och $n!(2n+1)$ växer mot ∞ får vi med Leibniz t.ex.

$$\left| I - \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \right| < \frac{1}{5!(2\cdot 5+1)} < 10^{-3},$$

d.v.s. $I \approx \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}$ med fel mindre än 10^{-3}. $||$

$\star$ Övning P.7. Sätt formellt in ix i stället för x i exponentialutvecklingen och tag real- och imaginärdelar. Slutsats?

$\star$ Övning P.8. Beräkna $\arctan \frac{1}{3}$ med ett fel av högst 10^{-4}.

$\star$ Övning P.9. Härled potensserieutvecklingen för $\arcsin x$. Ange m.h.a. denna en numerisk serie som beskriver talet π, och beräkna de första termerna i denna serie.

$\star$ Övning P.10. Skriv $\ln 2$ som en serie genom att välja x lämpligt i $\ln \frac{1+x}{1-x}$. Tycker du att denna serie är bättre eller sämre än den som härleddes i Exempel P.11? Vilken serie konvergerar snabbast mot $\ln 2$?

$\star$ Övning P.11. Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ satisfierar differentialekvationen

$$y'' = y, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$$

för att därigenom beräkna potensseriens summa.

$\star$ Övning P.12. Beräkna summan av följande potensserier: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

$\star$ Övning P.13. Som framgår ovan är

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad R = 1.$$

Vad kan du säga om potensserien

$$x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \ldots?$$

Svar till några övningar

P.6 $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{16} + \ldots,\ R = \infty$

P.8 $\arctan \frac{1}{3} \approx \frac{1}{1\cdot 3^1} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}$, med abs(fel) $< \frac{1}{7\cdot 3^7} < 10^{-4}$

P.9 $\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ R = 1;$

$$\pi = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+1}}{2n+1} = 3 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2}}{n! \cdot (2n+1) \cdot 4^n} = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \ldots$$

P.10 $\ln 2 = \frac{2}{1\cdot 3^1} + \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \ldots$

P.11 $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

P.12 (a) $\frac{\cosh x + \cos x}{2}$ (b) $\frac{1}{3} e^x + \frac{2}{3} e^{-x/2} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}$

P.13 $\int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t}\, dt,\ R = 1$

LA november 2004