Nr 23, 17 maj -05, Amelia 2

23 Konservativa fält i $\mathbf{R}^3$ och rotation

23.1 Potential

23.1.1 Två dimensioner (2D)

I två dimensioner definierade vi ett vektorfält som konservativt om kurvintegralen av fältet *endast* beror på start- och slutpunkt, och *inte av vilken väg* vi tar mellan de två punkterna:

Sats 1 *Antag att* $\mathbf{F}$ *är ett vektorfält från* $\mathbf{R}^2$ *till* $\mathbf{R}^2$ *som är definierad i ett öppet och sammanhängande område* D*. Om*

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$

för alla kurvor Γ *och* γ *med samma start- och slutpunkt, så är vektorfältet* ***konservativt****. Kurvintegralen är då* ***oberoende av vägen****.*

Då kan vi definiera en funktion $U(x,y)$ så att

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1).$$

Denna funktion kallas en **potential** $U(x,y)$ till det konservativa vektorfältet $\mathbf{F}(x,y)$. Genom att derivera U m.a.p. en variabel, och sätta in definitionen av potential (alltså kurvintegralen ovan), så kan vi lätt visa att det måste vara så att

$$\begin{aligned} U'_x &= P \text{ och} \\ U'_y &= Q, \end{aligned}$$

Så om $\mathbf{F}$ har en potential U så gäller att $\nabla U = \mathbf{F}$.

23.1.2 Tre dimensioner (3D)

Ovanstående resonemang kan genomföras på samma sätt i tre dimensioner. Således

Sats 2 *Om* $\mathbf{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ *är ett* ***konservativt*** *vektorfält från* $\mathbf{R}^3$ *till* $\mathbf{R}^3$ *definierad i ett öppet och sammanhängande område* D *om kurvintegralen är* ***oberoende av vägen****, dvs*

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$

för alla kurvor Γ och γ med samma start- och slutpunkt i D. Då finns en potential $U(x,y,z)$ så att

$$\int_{startpunkt}^{slutpunkt} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = U(slutpunkt) - U(startpunkt).$$

och $\nabla U = \mathbf{F}$, dvs

$$\begin{aligned} U'_x &= P \\ U'_y &= Q, \text{ och} \\ U'_z &= R. \end{aligned}$$

23.2 Rotation och Stokes sats

23.2.1 Greens formel (2D) och rotation (3D)

Åter till två dimensioner. Där vi har Greens formel

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint (Q'_x - P'_y) dxdy,$$

Om $\mathbf{F}$ har potential U så gäller att $\mathbf{F} = (P, Q) = (U'_x, U'_y)$. Sätter vi in U detta i uttrycket $Q'_x - R'_y$, integranden i Greens formel, så får vi

$$Q'_x - R'_y = U''_{yx} - U''_{xy} = 0.$$

Att integranden längs varje sluten kurva är noll är samma sak som att kurvintegralen är oberoende av vägen, ty två olika kurvor mellan samma punkter som inte skär varandra kan sättas ihop till en sluten kurva.

Om $Q'_x = R'_y$ gäller så kallas vektorfältet **exakt.** Om området D är enkelt sammanhängande (saknar hål) så gäller att om $Q'_x = P'_y$ så har $\mathbf{F}$ en potential U. Alltså: under förutsättning att området är enkelt sammanhängande så implicerar "vektorfältet är exakt" att "vektorfältet har en potential".

Det betyder att $Q'_x = P'_y$ är ett villkor för att det existerar en potential U. Villkoret har den nackdelen att det inte är stor hjälp för att beräkna denna potential.

Denna egenskap, att vektorfältet är exakt, kan inte lika självklart generaliseras till tre dimensioner som resonemanget om potential ovan. Men det begrepp vi behöver här är rotationen till $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. Vi har redan definierat rotationen, som

$$\text{rot } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_x - R'_z, Q'_x - P'_y).$$

Vi kan betrakta ett tvådimensionellt vektorfält $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ som ett tredimensionellt genom att lägga till en tredje komponent som är noll:

$$(P(x,y), Q(x,y), 0).$$

Skillnaden mot ett tredimensionellt vektorfält $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ är alltså att $R = 0$ samt att P och Q är oberoende av z. I rotationen av ett sådant vektorfält är då alla derivator av R noll (ty $R = 0$) och alla derivator med z är noll (ty oberoende av z). Då är $(R'_y - Q'_z, P'_x - R'_z, Q'_x - P'_y) = (0 - 0, 0 - 0, Q'_x - P'_y)$, så

$$\text{rot } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (0, 0, Q'_x - P'_y),$$

Rotationen av ett tvådimensionellt vektorfält som är lyft till tre dimensioner har alltså bara en z-komponent, och den komponenten är just den storhet som förekommer i Greens formel.

Så i två dimensioner gäller att "rotationen av $\mathbf{F}$ är noll" är samma villkor som att "$\mathbf{F}$ är exakt". Vi ska se att detta gäller även i tre dimensioner, här har vi vår generalisering.Vi kan lyfta Greens formel från en sluten kurva i planet till en sluten kurva i rummet. Då får vi Stokes sats: Här är den slutna kurvan kanten på en eventuellt buktig yta, som exempelvis kanten till en halvsfär. I Greens formel har vi integranden $Q'_x - P'_y$, vilken är z-komponenten av rot $\mathbf{F} = (0, 0, Q'_x - P'_y)$. Denna komponent får man kvar om man tar skalärprodukt med $\widehat{z} = (0, 0, 1)$, som är normalriktning till ytan i planet $\mathbf{R}^2$. Alltså: $Q'_x - P'_y = (0, 0, Q'_x - P'_y)\cdot\widehat{z} = (\text{rot } \mathbf{F})\cdot\widehat{z}$ $(= \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}\cdot\widehat{z}$, ty vi har ju två beteckningssätt: rot $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})$.

I Greens formel har vi alltså en likhet mellan en kurvintegral $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ och en dubbelintegral över ett ytstycke i planet. Denna ytintegral har integrand som är ett vektorfält (nämligen $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$) skalärt med en normalriktning – det är alltså en flödesintegral. Vektorfältet är inte $\mathbf{F}$ utan $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$. Detta är Stokes sats, en likhet mellan en sluten kurvintegral över $\mathbf{F}$ och en flödesintegral över $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$ på ytan innanför den slutna kurvan.

Sats 3 (Stokes' sats) *Om $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ är ett vektorfält som är kontinuerligt deriverbart överallt på en yta S med kant Γ, så gäller*

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_S \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}\cdot\widehat{n} dS.$$

Vi förutsätter att S är en reguljär yta, att kanten Γ är enkelt sammanhängande och att S och Γ har samma orientering.

Att S och Γ har samma orientering måste kommenteras, eftersom vi talar om olika typer av orientering. En ytas orientering är vilken sida normalriktningen befinner sig, medan en sluten kurvas orientering är vilken riktning kurvan genomlöps. Kurvan har positiv orientering om området befinner sig på vänster sida om kurvan då den genomlöps. Positiv orientering av kurvan knyts till en normalriktning på ytan på samma sätt som positiv led i planet kopplas till positiv z-riktning – se ovanstående diskussion av Greens formel som rotationen av ett tvådimensionellt vektorfält. Om detta gäller har S och Γ samma orientering.

Skiss av bevis: Analogt med Gauss sats är Stokes sats faktiskt en summa av tre likheter. Sätter man

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) = (P, 0, 0) + (0, Q, 0) + (0, 0, R)$$

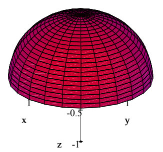
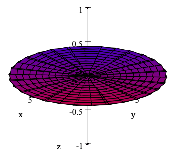
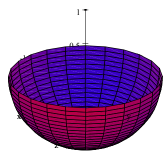
och tillämpar satsen på var och en av $(P, 0, 0)$, $(0, Q, 0)$ och $(0, 0, R)$ i taget, så är Stokes sats för vektorfältet$(P, 0, 0)$ påståendet

$$\oint_\Gamma P dx = \iint_S (0, P_z', -P_y') \cdot \widehat{n} dS.$$

Detta kan bevisas väsentligen genom att sätta in en parameterframställning i $\oint_\Gamma P dx$ och att använda Greens formel i parametrarna. Det ger en dubbelintegral som visar sig sammanfalla med $\iint_S (0, P_z', -P_y') \cdot \widehat{n} dS$, som framgår genom att sätta in en parameterframställning för ytan.

23.2.2 Flödesintegral oberoende av ytan

Något som kan tyckas märkligt med Stokes sats är att man kan använda olika ytor som har samma kant. De tre följande ytorna har samma kant

Kanten är här en cirkel i xy-planet. Flödesintegraler över dessa tre, S_1 S_2 och S_3 är förstås $\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS$, $\iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS$ och $\iint_{S_3} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS$. Om de har normalen riktad åt samma håll så är alla lika med samma kvantitet enligt Stokes sats, nämligen $\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$:

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_{S_i} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS.$$

Detta kan formuleras som att flödesintegralen är **oberoende av ytan** med en viss given kant. Detta i analogi med kurvintegralernas oberoende av vägen med vissa givna start- och slutpunkter. Det gäller inte i allmänhet men alltså alltid om fältet i flödesintegralen är en rotation: $\nabla \times \mathbf{F}$.

23.2.3 Potential och vektorpotential

Enligt Stokes sats får vi alltså om $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (0,0,0)$ att

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \iint_{S} (0,0,0) \cdot \widehat{n} dS = 0.$$

Så om $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ så är kurvintegraler på slutna kurvor noll, dvs kurvintegralen av $\mathbf{F}$ är oberoende av vägen, i vilket fall vi vet att det finns en potential.

Således följer från Stokes sats att: **om fältets rotation är noll så är kurvintegralen oberoende vägen. Fältet är då en gradient, dvs det har en potential**.

Vi såg i samband med Gauss sats att om divergensen är noll är flödesintegralen noll över en sluten yta. Det är samma som att flödesintegralen är oberoende av vilken yta vi fyller i randkurvan med – den är oberoende av ytan i den ovanstående definitionen. I analogi med potentialen U,som är sådan att $\mathbf{F} = \nabla U$ (alltså, fältet $\mathbf{F}$ är en gradient), finns det ibland också en s.k. **vektorpotential**, dvs ett vektorfält $\mathbf{A}$ så att $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Vektorpotentialen existerar just om divergensen är noll. Utan att gå in i detalj nämner vi den följande motsvarigheten: **om fältets divergens är noll så är flödesintegralen oberoende av ytan. Fältet är då en rotation, dvs det har en vektorpotential**.

23.3 Lösta exempel

Exempel 4 *(1113) Undersök om* $\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2y + y^2 + y, x^3 + 2xyz + x, 2z)$ *är konservativt, och beräkna en potential om så är fallet.*

Lösning: Vi har tre ekvationer för potentialen:

$$\begin{aligned} 1)\ U'_x &= 3x^2y + y^2 + y \\ 2)\ U'_y &= x^3 + 2xyz + x \\ 3)\ U'_z &= 2z. \end{aligned}$$

Vi får genom att integrera den första ekvationen m.a.p. x

$$U = x^3y + x(y^2 + y) + f(y,z).$$

Derivering av detta m.a.p. y och jämförelse med ekvation 2) ger ekvationen

$$x^3 + x(2y+1) + f'_y(y,z) = x^3 + 2xyz + x.$$

Alltså:

$$\begin{aligned} f'_y(y,z) &= 2xyz + x - x(2y+1) \\ &= 2xy(z-1). \end{aligned}$$

Detta är en orimlig ekvation, ty vänsterledet $f'_y(y,z)$ beror inte på x men högerledet $2xy(z-1)$ gör det. Då existerar det inte någon potential.

Svar: Det existerar inte någon potential.

Exempel 5 *(1114) Betrakta* $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xe^{-y}, -\cos z - x^2e^{-y}, y\sin z)$. *Visa att vektorfältet har potential, och beräkna den potential som har värdet* 3 *i punkten* $(1,0,\pi)$.

Lösning: Vi har förstås tre ekvationer som potentialen måste uppfylla om den finns:

$$\begin{aligned} U'_x &= 2xe^{-y} \\ U'_y &= -\cos z - x^2e^{-y} \\ U'_z &= y\sin z. \end{aligned}$$

Här ger integration av den första ekvationen

$$U = x^2e^{-y} + f(y,z).$$

Derivering m.a.p. y ger

$$-x^2e^{-y} + f'_y(y,z) = -\cos z - x^2e^{-y},$$

alltså

$$f'_y(y,z) = -\cos z.$$

Integration m.a.p. y ger

$$f(y,z) = -y\cos z + g(z).$$

Notera integrations"konstanten" $g(z)$. Insättning av $f(y,z) = -y\cos z + g(z)$ i $U = x^2e^{-y} + f(y,z)$ ger

$$U = x^2e^{-y} - y\cos z + g(z).$$

Derivering m.a.p. z ger nu med den tredje ekvationen

$$y\sin z + g'(z) = y\sin z,$$

alltså

$$g'(z) = 0.$$

Vi kan ta $g(z) = C$, och vi har potentialen

$$U(x,y,z) = x^2e^{-y} - y\cos z + C.$$

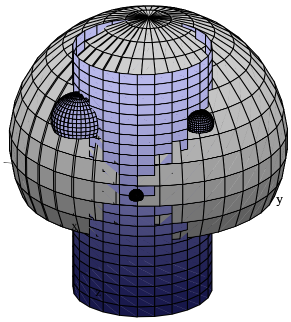
Med villkoret $U(1,0,\pi) = 3$ kan vi bestämma C. Det ger

$$\begin{aligned} 3 &= 1^2e^{-0} - 0\cos\pi + C, \text{ dvs} \\ C &= 2. \end{aligned}$$

Svar: $U(x,y,z) = x^2e^{-y} - y\cos z + 2$.

Exempel 6 *(boken: 11.13b) Beräkna* $\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *då* $\mathbf{F}(x,y,z) = (z, z^2, x)$ *och* Γ *är skärningskurvan mellan* $x^2+y^2 = 1$ *och* $(x+1)^2+y^2+z^2 = 4$ *då* $z \geq 0$*. Kurvans orientering bestäms att att punkterna* $(1,0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ *och* $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ *genomlöps i denna ordning.*

Lösning: I följande figur är de två ytorna och de tre punkterna $(1,0,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ och $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ markerade med ökande storlek.



Insättning av $x^2+y^2 = 1$ i $(x+1)^2+y^2+z^2 = 4$, dvs $x^2+2x+1+y^2+z^2 = 4$ ger $x^2+y^2 = 1$ och $2x+1+1+z^2 = 4$, dvs $x = 1 - \frac{1}{2}z^2$. Med Stokes sats får vi $\nabla \times \mathbf{F} = (0-2z, 1-1, 0) = (-2z, 0, 0)$ att integrera över ytan $x = 1 - \frac{1}{2}z^2$. Ytan har parameterframställning

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= \sqrt{2(1-x)} \end{aligned}$$

och $x^2+y^2 \leq 1$. På ytan har vi $\nabla\times\mathbf{F} = (-2z, 0, 0) = (-\sqrt{2x}, 0, 0)$. Vi integrerar alltså grafen till $z = \sqrt{\frac{x}{2}}$, då en normalriktning är $\widehat{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$, dvs

$$(\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}, 0, 1).$$

Normalriktning i z-led (med positiv z-komponent) stämmer med kurvans genomloppsriktning och och hur de två ska stämma överens i Stokes sats.

Enligt Stokes sats är ntegranden följande skalärprodukt:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\widehat{n} &= (-2\sqrt{2(1-x)}, 0, 0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2(1-x)}}, 0, 1) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Vi får då med Stokes sats

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \iint\limits_{S_i} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS \\
&= \iint\limits_{S_i} (-2) dxdy \\
&= -2(\text{arean av enhetscirkeln}) = -2\pi.
\end{aligned}$$

Svar: $\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = -2\pi.$