KTH-Matematik

Tentamenskrivning, 2006-08-21, kl. 08.00-13.00
5B1117, matematik III för E och ME (6p)

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 11, 16 och 22 poäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. Lösningsförslaget skall textförkaras
Bristande läsbarhet medför poängavdrag. (kladdpaper skall inte lämnas in)

Hjälpmedel: Medföljande formelblad. För matematik III.

3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på KS X, $1 \le X \le 3$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X, så skall motsvarande tal X inte räknas om
.

1. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiderna
$z = 3x^2 + 4y^2$ och $z = 2x^2 + 3y^2 + 4$

2. Beräkna $\oiint_{\partial \mathbf{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) d\sigma$
då $\mathbf{F} = \left(x^3 + z, y^3 + x, z^3 + y\right)$ och $\mathbf{K}$ är cylindern $\left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$.

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r + r^2 \sin^2\theta \mathbf{e}_\theta + r\mathbf{e}_\varphi$ är givet i sfäriska koordinater.
Beräkna $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är randen till den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
som ligger i första oktanten$\left(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\right)$.
Orientering: moturs sett från punkten$(5,5,5)$

Vargod vänd

4-poängsuppgifter

4. Låt r, θ och φ vara de tre sfäriska koordinaterna och $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r^n \sin\theta \mathbf{e}_\varphi$.

Bestäm de n för vilka $\oint_\gamma rot(\mathbf{F}) \bullet dr = 0$, för varje sluten kurva γ som inte går genom origo.

Motivera ordendligt!

5. Låt $\mathbf{F} = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - z, x - \dfrac{x}{x^2+y^2}, y + x^2 \right)$

och $S_1 = \{(x,y,z) : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40\}, S_2 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}$.

Beräkna det arbete som ventrofältet $\mathbf{F}$ uträttar längs skärningskurvan γ mellan S_1 och S_2.

6. Bestäm konstanterna a,b,c så att

$$\begin{cases} x = u^2 + av^2 \\ y = 2uv \\ z = bu + cv + w \end{cases}$$

definierar ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u,v,w). (2p)

Beräkna de kroklinjiga komponenterna A_u, A_v, A_w av vektorfältet $\mathbf{A} = (x,y,3z)$. (2p)

7. a) Låt $\mathbf{r}$ vara ortsvektorn i rymden och $\mathbf{B}$ vara en kontinuerligt deriverbart vektorfält i rymden. Visa att $div(\mathbf{B} \times \mathbf{r}) = rot(\mathbf{B}) \bullet \mathbf{r}$ (1p)

b) Låt $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ och vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara källfritt och kontinuerligt deriverbar i hela Ω. Beräkna $\oiiint_\Omega (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{r}) dv$. (3p)