

Tentamenskrivning, 2006-05-30, kl. 08.00-13.00. 5B1117, matematik III för E och ME (6p)

Preliminära gränser för betygen 3, 4 och 5 är 11, 16 och 22 poäng. Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig och tydlig lösning. *Lösningförslaget skall textförkaras Bristande läsbarhet medför poängavdrag.*

Hjälpmedel: Medföljande formelblad för matematik III.

3-poängsuppgifter

Den som blivit godkänd på KS X , $1 \leq X \leq 3$, hoppar över motsvarande uppgift nedan och får full poäng på uppgiften. Är man godkänd på KS X , så skall motsvarande tal X inte räknas om.

1. Beräkna $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$, där $D = \left\{ (x, y) : x > 0, x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2} \right\}$

2. Beräkna på valfritt sätt linjeintegralen $\int_{\Gamma} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, där kurvan Γ startar i punkten (0,1), går därefter vågrätt till (-3,1), sedan lodrätt ned till (-3,-1) och slutligen vågrätt ned till (0,-1)

3. Vektorfältet $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r + r^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_\theta + r \mathbf{e}_\phi$ är givet i sfäriska koordinater.

Beräkna $\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är randen till den del av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

som ligger i första oktanten ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$). Orientering: moturs sett från punkten (5,5,5)

4-poängsuppgifter

4. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (xz^2 + e^z, 2x^2yz, y^2z^2 + 1)$

Över ytan $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ med normalriktning uppåt.

5. I en vätska kan Newtons ekvation skrivas $\rho(\mathbf{r}) \mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\nabla p(\mathbf{r})$, där

$\rho(\mathbf{r})$ är masstätheten, $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ acceleration, $p(\mathbf{r})$ det lokala trycket och $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Bestäm den vinkeln som $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ bildar med $\text{rot}(\mathbf{a}(\mathbf{r}))$.

($\mathbf{a}(\mathbf{r})$ och $\rho(\mathbf{r})$ är kontinuerligt deriverbara)

6. Σ är randytan till en kropp K med utåtriktad enhetsnormelen $\hat{\mathbf{n}}$ och $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är Ortsvektorn i rummet. Beräkna (tex med varianter av Gauss'sats) följande uttryck:

$$\iint_{\Sigma} \hat{\mathbf{n}} d\sigma, \iiint_K \text{div}(\hat{\mathbf{n}}) dv, \iint_{\Sigma} (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) d\sigma.$$

7. Vektorfältet $\mathbf{F} = \frac{\cos \theta}{r^2} \mathbf{e}_r$ är given i sfäriska koordinater.

Bestäm flödet av \mathbf{F} genom ytan $x^2 + y^2 + 6z^2 = 4, z \geq 0$. Normalen pekar utåt sett från origo.