1 Föreläsning 9

1.1 Poissons och Laplaces ekvationer

Poissons ekvation är

$$\nabla^2\Phi = f \quad \text{i ngt område } V$$

där man använder beteckningen

$$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi\,.$$

Ofta används beteckningen Δ för ∇^2. I kartesiska koordinater har vi att

$$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\nabla\Phi = \nabla\cdot(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{z}) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\,.$$

Laplaces ekvation är Poissons ekvation med $f = 0$:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{i ngt område } V.$$

Lösningar till Laplaces ekvation kallas harmoniska funktioner.

Ex. 1 a) harmoniska funktioner i $\mathbb{R}^3$: x, y, z, $x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 - 2z^2$, xy, $x^3z - z^3x$, alla dessa funktioner är polynom och kallas därför också för harmoniska polynom. Låt oss kontrollera att t.ex. sista funktionen uppfyller Laplaces ekvation

$$\nabla^2(x^3z-z^3x) = \nabla\cdot\nabla(x^3z-z^3x) = \nabla\cdot(3x^2z-z^3, 0, x^3-3z^2x) = 6xz-6zx = 0\,.$$

b). $1/r$ är en harmonisk funktion i $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$:

$$\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r} = \nabla\cdot\left(\frac{-1}{r^2}\hat{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{-1}{r^2}\right) = 0\,.$$

Kontrollera att också $\cos\theta/r^2$ är harmonisk i samma område.

c). $\log\rho$ är en harmonisk funktion i $\mathbb{R}^3 \setminus z$–axeln:

$$\nabla\cdot\nabla\log\rho = \nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\hat{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{1}{\rho}\right) = 0\,.$$

Kontrollera att funktionen $\sin\varphi/\rho$ också är harmonisk i samma område.

För att se varför Laplaces och Poissons ekvationer är viktiga betraktar vi två av Maxwells ekvationer

$$\nabla\times\overline{A} = 0 \quad \text{och} \quad \nabla\cdot\overline{A} = f\,. \tag{1}$$

Från första ekvationen drar vi slutsatsen att vektorfältet $\overline{A}$ har en potential som vi ska beteckna med Φ, d.v.s. $\overline{A} = \Phi$. Från andra ekvationen i (1) får vi att $\nabla\cdot\nabla\Phi = f$, d.v.s. Φ uppfyller Poissons ekvation. Detta är en typisk situationen där Poissons ekvation förekommer. Observera att andra ekvationen i (1) har vi träffat på tidigare. Det är den så kallade kontinuitetsekvationen, vilken är grundläggande vid alla studier av strömning.

1.2 Dirichletproblemet för Poissons och Laplaces ekvationer

Låt V vara ett begränsat område med randen S.

Dirichletproblemet för Poissons ekvation är

$$\nabla^2\Phi = f \quad \text{i } V \tag{2}$$

och

$$\Phi = g \quad \text{på } S \tag{3}$$

där f och g är givna funktioner i området V och på randen S. Här krävs att hitta Φ.

Dirichletproblemet för Laplaces ekvation är

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{i } V$$

och

$$\Phi = g \quad \text{på } S$$

där g är en given funktion på randen S och återigen krävs det att hitta Φ.

Viktig roll i studiet av dessa problem spelar Greens formel.

Sats 1 Greens första formel. *Låt Φ och Ψ vara två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner i $\overline{V}$. Då har vi*

$$\int\int\int_V \Phi\,\Delta\Psi\,dV + \int\int\int_V \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\,dV = \int\int_S \Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}\,dS \tag{4}$$

där $\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}} = \hat{n}\cdot\nabla\Psi$–riktningsderivatan.

Bevis. Vi har

$$\int\int\int_V \Phi\,\Delta\Psi\,dV = \int\int\int_V \Big(\nabla\cdot(\Phi\nabla\Psi) - \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\Big)dV$$
$$= \text{Gauss sats} = -\int\int\int_V \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\,dV + \int\int_S \Phi\nabla\Psi\cdot\hat{n}dS\,.$$

Greens andra formel ser ut så här

$$\int\int\int_V \Phi\,\Delta\Psi\,dV - \int\int\int_V \Psi\,\Delta\Phi\,dV = \int\int_S \Big(\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}} - \Psi\,\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{n}}\Big)\,dS \tag{5}$$

Vi ger en typisk tillämpning av Greens första formel.

Sats 2 *Låt V vara begränsat och låt S vara randen till V. Dirichletproblemet* (2), (3) *har högst en lösning, som två är gånger kontinuerligt deriverbar i $\overline{V}$.*

Bevis. Låt Φ_1 och Φ_2 vara två lösningar till (2), (3). Då satisfierar $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{i } V$$

och $\Psi = 0$ på S. Nu ger (4) (med $\Phi = \Psi$)

$$\int\int\int_V \Psi \, \Delta\Psi \, dV + \int\int\int_V \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dV = \int\int_S \Psi \, \frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}} \, dS \, .$$

Detta medför att

$$\int\int\int_V \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dV = 0$$

eller $\nabla\Psi = 0$ i V. Detta ger att $\Psi =$ konst och eftersom $\Psi = 0$ på S har vi att $\Psi = 0$ eller $\Phi_1 = \Phi_2$.

Ex. Hitta en lösning till ekvationen

$$\nabla^2\Phi = 1 \quad \text{för } 0 \leq z \leq 1$$

där Φ uppfyller randvillkoren

$$\Phi = 0 \quad \text{för } z = 0 \quad \Phi = 1 \quad \text{för } z = 1$$

Lösning. Vi ska söka en lösning som bara beror på z, $\Phi = \Phi(z)$. Vi har

$$\nabla^2\Phi = \frac{d\Phi}{dz} = 1 \, .$$

Därför är $\Phi(z) = \frac{1}{2}z^2 + az + b$. $\Phi(0) = 0$ medför $b = 0$. $\Phi(1) = 1$ ger $a = 1/2$. Alltså

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z \, .$$

Ex. Hitta en lösning till

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{för } 1 \leq r \leq 2$$

med randvillkoren

$$\Phi = 1 \quad \text{för } r = 1 \quad \Phi = 2 \quad \text{för } r = 2$$

Lösn. Vi ska söka en lösning på formen $\Phi = \Phi(r)$. Då har vi

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = 0$$

Detta medför

$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = a \quad \text{eller} \quad \Phi = -\frac{a}{r} + b \, .$$

Randvillkoren ger

$$-a + b = 1 \quad \text{och} \quad -\frac{a}{2} + b = 2$$

Alltså $a = 2$, $b = 3$ och

$$\Phi(r) = -\frac{2}{r} + 3\,.$$

Observera att enligt Sats 2 finns det inte andra lösningar, d.v.s. den här lösningen är entydig.

Ex. Hitta en lösning till ekvationen

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad \text{då } 1 \leq \rho \leq 2$$

som uppfyller

$$\Phi = 1 \quad \text{då } \rho = 1 \quad \Phi = \frac{1}{2} \quad \text{då } \rho = 2.$$

Lösn. Vi söker en lösning på formen $\Phi = \Phi(\rho)$. Då har vi

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla \cdot \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho}\Big) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\Big) = 0\,.$$

Detta medför

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\Big) \quad \text{eller} \quad \rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = a \quad \text{eller} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{a}{\rho}\,.$$

Alltså

$$\Phi(\rho) = a\log\rho + b\,.$$

Från Dirichletrandvillkoren får man att

$$\Phi(1) = b = 1 \quad \text{och} \quad \Phi(2) = a\log 2 + b = \frac{1}{2}\,.$$

Svar.

$$\Phi(\rho) = -\frac{\log\rho}{2\log 2} + 1$$

.

1.3 Randvärdesproblem

Neumanns problem för Poissons ekvation i ett begränsat område V med randen S ser ut så här

$$\nabla^2\Phi = f \quad \text{i } V \tag{6}$$

och

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{n}} = g \quad \text{på } S \tag{7}$$

där f och g är givna funktioner i området V och på randen S. Här krävs att hitta Φ.

Först, observera att om Φ löser problemet, så löser $\Phi + C$ samma problem. Låt oss att visa att det inte finns några andra lösningar.

Anta att Φ_1 och Φ_2 är två lösningar till (6) och (7). Skillnaden $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ satisfierar $\nabla^2\Psi = 0$ i V och $\partial\Phi/\partial\hat{n} = 0$ på S. Greens första formel med $\Phi = \Psi$ ger (jämför med beviset av entydighetssatsen för Dirichletproblemet)

$$\int\int\int_V \nabla\Psi \cdot \nabla\Psi \, dV = 0$$

eller $\nabla\Psi = 0$ i V. Detta ger att $\Psi = C$ eller $\Phi_1 = \Phi_2 + C$.

Problem (6) och (7) har inte lösningar för alla f och g. För att se detta integrerar vi ekvationen (6) över V

$$\int\int\int_V \nabla \cdot (\nabla\Phi) dV = \int\int\int_V f dV \, .$$

Nu använder vi Gauss sats för vänsterledet

$$\int\int_S \nabla\Phi \cdot \hat{n} dS = \int\int\int_V f dV \, .$$

Eftersom $\nabla\Phi \cdot \hat{n} = \partial\Phi/\partial\hat{n} = g$ har vi att

$$\int\int_S g dS = \int\int\int_V f dV \, . \tag{8}$$

Så för att problem (6) och (7) ska ha en lösning måste (8) vara uppfyllt. Man kan bevisa att om (8) gäller så har problem (6) och (7) en lösning som är definierad upp till en konstant.

Det finns andra randvillkorsproblem för Poissons ekvation, t.ex. kan man ha Dirichletrandvillkor på en del av randen och Neumannrandvillkor på den andra delen av randen.