1 Föreläsning 5

1.1 Yta, ytelement, normal, orientering

Parametriserad yta. Vi börjar med ett exempel på en parametriserad yta: Sfären med radien R ges av

$$\overline{r} = R\sin\theta\cos\varphi\hat{x} + R\sin\theta\sin\varphi\hat{y} + R\cos\theta\hat{z}$$

eller

$$x = R\sin\theta\cos\varphi\,, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi\,, \quad z = R\cos\theta \tag{1}$$

där θ och φ är parametrar med $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Allmänt ger en funktion

$$\overline{r}(u,v) = x(u,v)\hat{x} + y(u,v)\hat{y} + z(u,v)\hat{z}$$

där $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ en parametrisering (eller parameterframställning) av en yta i rummet.

En *Funktionsyta* ges av $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Observera att en funktionsyta också kan betraktas som en parametriserad yta: $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$ med parameter x, y. Ett exempel: $z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Det är en paraboloid.

En *Nivåyta* ges av $\Phi(x,y,z) = 0$. Några exempel: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$–sfären med radien R; $x^2 + y^2 = 1$–cylinder; $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1$–ellipsoid.

Enhetsnormal. Vi ska beteckna ytor med S. I varje punkt på ytan S finns det ett tangentplan och en normal. En enhetsnormal ska betecknas med $\hat{n}$. I varje punkt finns det två enhetsnormaler $\pm\hat{n}$.

Betrakta först en parametriserad yta S som ges av $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$. På samma sätt som för kroklinjiga koordinater kan man införa u–kurvan (v betraktas som en konstant) och v–kurvan (u betraktas som en konstant). Genom varje punkt på ytan kan man dra u– och v–kurvor. Tangentplanet innehåller tangentvektorerna $\frac{\partial\overline{r}}{\partial u}$ och $\frac{\partial\overline{r}}{\partial v}$ till u–kurvan respektive v–kurvan. Så en normal till S ges av

$$\overline{n} = \frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}$$

och enhetsnormalerna är

$$\hat{n} = \pm\frac{\frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\right|}$$

En normal till nivåytan $\Phi(x,y,z) = C$ ges av $\overline{n} = \nabla\Phi$. Enhetsnormalerna är

$$\hat{n} = \pm\frac{\nabla\Phi}{\left|\nabla\Phi\right|}\,.$$

Funktionsytan $z = f(x, y)$ kan betraktas som nivåytan $\Phi = z - f(x, y) = 0$. Så formlerna som gäller för nivåytor kan användas och vi får $\overline{n} = (1, -f_x, -f_y)$, där $f_x = \partial f/\partial x$ och $f_y = \partial f/\partial y$. Enhetsnormalerna ges av

$$\hat{n} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right).$$

Ytelement. (i) Låt S vara en parametriserad yta given av $\overline{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega$. Låt oss räkna ut areaförändringen av en kvadrat med sidorna $u, u + du$ och $v, v + dv$. Kvadraten avbildas på en yta som kan approximeras med ett parallellogram med sidorna $\overline{r}(u, v), \overline{r}(u + du, v)$ och $\overline{r}(u, v), \overline{r}(u, v + dv)$. Arean av detta parallellogram ges av

$$|(\overline{r}(u + du, v) - \overline{r}(u, v)) \times (\overline{r}(u, v + dv) - \overline{r}(u, v))| = \left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right| dudv.$$

Alltså fås

$$dS = \left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial v} \right| dudv$$

(ii) Betrakta nu en funktionsyta $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Den kan betraktas som en parametriserad yta med parametrisering $x = x$, $y = y$ och $z = f(x, y)$. Så

$$\frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \hat{x} - f_y \hat{y} + \hat{z}\,.$$

Därför är

$$dS = \left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial y} \right| dxdy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

(iii) *Sfär med radien R.* Parametriseringen av sfären ges av (1). Observera att parametrarna här är θ och φ. Vi har

$$\left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi} \right| = h_\theta h_\varphi |\hat{\theta} \times \hat{\varphi}| = R^2 \sin\theta\,.$$

Alltså

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi\,. \qquad (2)$$

(iv) *Cylinder med radien R.* Parametriseringen av cylindern ges av

$$x = R\cos\varphi\,, \quad y = R\sin\varphi\,, \quad z = z\,,$$

där parametrarna är φ och z. Vi har

$$\left| \frac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \overline{r}}{\partial z} \right| = h_\varphi h_z |\hat{\varphi} \times \hat{z}| = R\,.$$

Således finner vi att

$$dS = R d\varphi dz\,.$$

1.2 Ytintegral

Låt S vara en yta med parametrisering $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$, och låt Φ vara en funktion på S. Då betecknas ytintegralen av funktionen Φ över ytan S med

$$\int\int_S \Phi dS$$

och den beräknas enligt

$$\int\int_\Omega \Phi(\overline{r}(u,v))\Big|\frac{\partial\overline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\overline{r}}{\partial v}\Big| dudv\,.$$

Om S är en funktionsyta $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$, fås ytintegralen till

$$\int\int_S \Phi dS = \int_\Omega \Phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy\,.$$

Ex. Bestäm ytintegralen

$$\int\int_S z^2 dS$$

där S är sfären med radien R.

Lösn. Vi använder parametriseringen (1) och formeln (2) för ytelement. Så vi har att

$$\int\int_S z^2 dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(R\cos\theta)^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{3}2\pi R^4 \int_0^{\pi}\frac{d}{d\theta}(\cos^3\theta)d\theta = \frac{4\pi}{3}R^4.$$

Ex. Vid beräkning av en ytintegral måste två saker bestämmas: Lämplig parametrisering och ytelementet. I nästa exempel ska vi beräkna arean av ytan: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq 1$.

Lösn. a). Parametrisering: $x = x$, $y = y$, $z = x^2 + y^2$, där $x^2 + y^2 \leq 1$.

b). Ytelementet är $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.

Arean beräknas enligt

$$\int_S dS = \int\int_{x^2+y^2\leq 1}\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1\sqrt{1 + 4\rho^2}\rho d\rho d\varphi\,.$$

Här använder vi polära koordinater för att beräkna integralen över enhetscirkeln. Så

$$\text{Arean} = 2\pi\int_0^1\sqrt{1 + 4\rho^2}\rho d\rho = \frac{2\pi}{12}\int_0^1\frac{d}{d\rho}(1 + 4\rho^2)^{3/2}d\rho = \frac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1)\,.$$

Flödesintegral. För att definiera flödesintegral behöver vi begreppet orientering av en yta. Som vi har sett finns det två enhetsnormaler till en yta S

i varje punkt. Så det finns två möjligheter att välja ett kontinuerligt vektorfält på S som sammanfaller med en av enhetsnormalerna i varje punkt. Man säger att ytan har två orienteringar. En orientering av ytan fås alltså genom att välja ett av dessa två vektorfält (av enhetsnormaler). Låt S vara en orienterad yta med orienteringen $\hat{n}$ och låt $\overline{A}$ vara ett vektorfält på S. Flödesintegralen av vektorfältet $\overline{A}$ genom ytan S i riktningen $\hat{n}$ definieras som

$$\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS \,.$$

Det finns tre saker att tänka på vid beräkning av en flödesintegral: parametrisering, ytelement, samt orienteringen (fältet av enhetsnormaler).

Ex. Det elektriska fältet kring punktladdning i origo ges av

$$\overline{E} = \frac{\hat{r}}{r^2} \,.$$

Beräkna flödet av $\overline{E}$ ut genom en sfär med radien R.

Lösn. a) Parametriseringen är samma som i (1); b) ytelementet ges av (2); c) enhetsnormalen (ut ur sfären) är $\hat{r}$. Så

$$\int_S \overline{E} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\hat{r}}{R^2} \cdot \hat{r} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\varphi = -2\pi [\cos\theta]_0^{\pi} = 4\pi \,.$$

Ex. Beräkna flödesintegralen av vektorfältet $\overline{A} = \nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)$ (dipolfältet) genom halvsfären $r = R$, $z \geq 0$. Orientering väljes enligt $\hat{n} \cdot \hat{z} \geq 0$.

Lösn. Parametrisering och ytelement är samma som i föregående ex. men $0 \leq \theta \leq \pi/2$, normalen är $\hat{n} = \hat{r}$. Så

$$\begin{aligned}
&\int_S \overline{A} \cdot \hat{n} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \nabla\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right) \cdot \hat{r} dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}\right)\hat{\theta}\right) \cdot \hat{r} R^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\
&= -\frac{4\pi}{R} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = -\frac{2\pi}{R}.
\end{aligned}$$