1 Föreläsning 3

Många fysikaliska problem har någon slags symmetri. Mest vanligt förekommande är sfärisk och cylindrisk. Det visar sig att man kan förenkla beräkningar betydligt om man använder sfäriska och/eller cylindriska koordinater.

1.1 Sfäriska koordinater

För att införa sfäriska koordinater är det bekvämt att anta att vi från början har cartesiska koordinater x, y, z i rummet $\mathbb{R}^3$.

Sfäriska koordinaterna r, θ och φ definieras som att

$$r \text{ är avståndet till origo, } r \geq 0,$$

$$\theta \text{ är vinkeln mellan } z\text{–axeln och } \overline{r}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi\,,$$

$$\varphi \text{ är vinkeln melan } x\text{–axeln och vektorn } (x, y, 0), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Med hjälp av definitionen kan man visa det följande sambandet mellan cartesiska och sfäriska koordinaterna:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

Koordinatlinjer. Det finns tre sorter av koordinatlinjer:

$$\theta = \theta_0 \quad \varphi = \varphi_0 \quad r\text{–kurva (halvlinje)},$$

$$r = r_0\,, \quad \theta = \theta_0 \quad \varphi\text{–kurva (cirkel)},$$

$$r = r_0\,, \quad \varphi = \varphi_0 \quad \theta\text{–kurva (halvcirkel)}.$$

Betrakta en punkt P med de sfäriska koordinaterna r_0, θ_0 och φ_0. Vi kan dra r–kurvan, θ–kurvan och φ–kurvan genom den här punkten. Dessa kurvorna är ortogonala mot varandra. Vi räknar ut tangenterna i punkten r_0, θ_0, φ_0. r-kurvan ges av

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \\ y &= r \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \\ z &= r \cos\theta_0 \end{aligned}$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{dr} = \left(\frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr}, \frac{dz}{dr}\right) = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)\,,$$

θ–kurvan ges av

$$\begin{aligned} x &= r_0 \sin\theta \cos\varphi_0 \\ y &= r_0 \sin\theta \sin\varphi_0 \\ z &= r_0 \cos\theta \end{aligned}$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{d\theta} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta}\right) = (r_0 \cos\theta_0 \cos\varphi_0, r_0 \cos\theta_0 \sin\varphi_0, -r_0 \sin\theta_0)\,,$$

φ–kurvan ges av

$$\begin{aligned} x &= r_0 \sin\theta_0 \cos\varphi \\ y &= r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi \\ z &= r_0 \cos\theta_0 \end{aligned}$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{d\varphi} = \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi}\right) = (-r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, r_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, 0)$$

Man kan kontrollera att tangentvektorerna är ortogonala. Deras längdar betecknas som h_r, h_θ och h_φ och kallas skalfaktorer. Vi har

$$\frac{d\overline{r}}{dr} \cdot \frac{d\overline{r}}{dr} = \sin^2\theta_0 \cos^2\varphi_0 + \sin^2\theta_0 \sin^2\varphi_0 + \cos^2\theta_0 = 1\,,$$

$$\frac{d\overline{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\overline{r}}{d\theta} = r_0^2 \cos^2\theta_0 \cos^2\varphi_0 + r_0^2 \cos^2\theta_0 \sin^2\varphi_0 + r_0^2 \sin^2\theta_0 = r_0^2$$

och

$$\frac{d\overline{r}}{d\varphi} \cdot \frac{d\overline{r}}{d\varphi} = r_0^2 \sin^2\theta_0 \sin^2\varphi_0 + r_0^2 \sin^2\theta_0 \cos^2\varphi_0 = r_0^2 \sin^2\theta_0\,.$$

Därför är

$$h_r = 1\,, \quad h_\theta = r_0\,, \quad h_\varphi = r_0 \sin\theta_0\,.$$

Normerar vi tangentvektorerna får vi en ON-bas $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ och $\hat{\varphi}$:

$$\hat{r} = \frac{1}{h_r}\frac{d\overline{r}}{dr} = \left(\frac{dx}{dr}, \frac{dy}{dr}, \frac{dz}{dr}\right) = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0)\,,$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{h_\theta}\frac{d\overline{r}}{d\theta} = \left(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta}\right) = (\cos\theta_0 \cos\varphi_0, \cos\theta_0 \sin\varphi_0, -\sin\theta_0)$$

och

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi}\frac{d\overline{r}}{d\varphi} = \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi}\right) = (-r_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0, r_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0, 0)$$

Observera att basen $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ och $\hat{\varphi}$ beror på θ_0 och φ_0. Nu kan man skriva om vektorfält i sfäriska koordinater.

Ex.1

$$\overline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = r \sin\theta \cos\varphi \hat{x} + r \sin\theta \sin\varphi \hat{y} + r \cos\theta \hat{z} = r\hat{r}$$

Gravitationsfältet:

$$\overline{A} = -C\frac{\overline{r}}{r^3} = -C\frac{\hat{r}}{r^2}$$

Linjeintegral i sfäriska koordinater. Man kan använda sfäriska koordinater för att räkna ut linjeintegralen

$$\int_L \overline{A} \cdot d\overline{r} = \int_a^b \overline{A} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} dt$$

Vi skriver om vektorfältet $\overline{A}$ i sfäriska koordinater

$$\overline{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}$$

och tangentvektorn:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{r}}{dt} &= \frac{\partial \overline{r}}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = h_r \frac{dr}{dt}\hat{r} + h_\theta \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + h_\varphi \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} \\ &= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} \end{aligned}$$

Alltså

$$\int_L \overline{A} \cdot d\overline{r} = \int_a^b \Big(A_r \frac{dr}{dt} + A_\theta r \frac{d\theta}{dt} + A_\varphi r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \Big) dt$$

Man antar här att kurvan är given i sfäriska koordinater som $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$.

Ex. Låt L vara segmentet mellan $(0, 0, R_0)$ och $(0, 0, R_1)$, och $\overline{A}$ vara gravitationsfältet $-C\frac{\hat{r}}{r^2}$. Vi parametriserar L i sfäriska koordinater som $r(t) = R_0 + t(R_1 - R_0)$, $\theta = 0$ och $\varphi = 0$, $t \in [0, 1]$. Eftersom $A_r = -C/r^2$, $A_\theta = A_\varphi = 0$ har vi att

$$\int_L \overline{A} \cdot d\overline{r} = -C \int_0^1 \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} dt = -C \int_0^1 \frac{R_1 - R_0}{(R_0 + t(R_1 - R_0))^2} dt = C\Big(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\Big)$$

1.2 Cylindriska koordinater

Cylindriska koordinaterna ρ, φ och z definieras som att

$$\rho \text{ är avståndet till } z\text{-axeln, } \rho \geq 0,$$

$$\varphi \text{ är vinkeln melan } x\text{–axeln och vektorn } (x, y, 0), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

och z är samma som i cartesiska koordinater. Med hjälp av definitionen kan man visa det följande sambandet mellan cartesiska och cylindriska koordinaterna:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

Koordinatlinjer. Det finns tre sorter av koordinatlinjer:

$$\varphi = \varphi_0 \quad z = z_0 \quad \rho\text{–kurva (halvlinje),}$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{d\rho} = \left(\frac{dx}{d\rho}, \frac{dy}{d\rho}, \frac{dz}{d\rho}\right) = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0, 0)\,,$$

$$\rho = \rho_0\,, \quad z = z_0 \quad \varphi\text{–kurva (cirkel)},$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{d\varphi} = \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi}\right) = (-\rho\sin\varphi_0, \rho\cos\varphi_0, 0)\,,$$

$$\rho = \rho_0\,, \quad \varphi = \varphi_0 \quad z\text{–kurva (rät linje, som är parallell med } z\text{-axeln)}$$

och tangenten är

$$\frac{d\overline{r}}{dz} = \left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{dz}{dz}\right) = (0, 0, 1)\,.$$

Genom varje punkt går koordinatlinjer som skär varandra under rät vinkel. Därför är tangentvektorerna ortogonala. Skalfaktorerna är

$$h_\rho = \left|\frac{d\overline{r}}{d\rho}\right| = 1$$

$$h_\varphi = \left|\frac{d\overline{r}}{d\varphi}\right| = \rho$$

och

$$h_z = \left|\frac{d\overline{r}}{dz}\right| = 1\,.$$

Nu kan vi få en ON-bas genom att normera tangentvektorerna:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{h_\rho}\frac{d\overline{r}}{d\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,,$$

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{h_\varphi}\frac{d\overline{r}}{d\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$$

och

$$\hat{z} = \frac{1}{h_z}\frac{d\overline{r}}{dz} = (0, 0, 1)\,.$$

Kontrollera direkt att $\hat{\rho}$, $\hat{\varphi}$ och $\hat{z}$ är en ON-bas.

Ex. 1.

$$\overline{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\cos\varphi\hat{x} + \rho\sin\varphi\hat{\varphi} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

2. Magnetfältet runt en oändlig rak ledare längs z-axeln ges av

$$\overline{B} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}\,.$$

Eftersom

$$-y\hat{x} + x\hat{y} = -\rho\sin\varphi\hat{x} + \rho\cos\varphi\hat{y} = \rho\hat{\varphi}$$

har vi att

$$\overline{B} = \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\,.$$

3. Anta att en oändligt lång tråd längs z axeln har konstant laddningstäthet. Det elektriska fältet för tråden blir

$$\overline{E} = \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho}\,.$$

Linjeintegral i cylindriska koordinater. Man kan använda cylindriska koordinater för att räkna ut linjeintegralen

$$\int_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \int_a^b \overline{A}\cdot\frac{d\overline{r}}{dt}dt\,.$$

Vi skriver om vektorfältet $\overline{A}$ i cylindriska koordinater

$$\overline{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}$$

och tangentvektorn:

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{r}}{dt} &= \frac{\partial\overline{r}}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial\overline{r}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\overline{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = h_\rho\frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + h_\varphi\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} + h_z\frac{dz}{dt}\hat{z}\\ &= \frac{d\rho}{dt}\hat{\rho} + \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} + \frac{dz}{dt}\hat{z}\,,\end{aligned}$$

alltså

$$\int_L \overline{A}\cdot d\overline{r} = \int_a^b \Big(A_\rho\frac{d\rho}{dt} + A_\varphi\rho\frac{d\varphi}{dt} + A_z\frac{dz}{dt}\Big)dt$$

Man antar här att kurvan är given i cylindriska koordinater som $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$.