1 Föreläsning 10

1.1 Vektorpotential

Låt $\overline{A}$ och $\overline{B}$ vara vektorfält och

$$\nabla \times \overline{A} = \overline{B} \,.$$

Då kallas $\overline{A}$ vektorpotential till $\overline{B}$.

Här är några egenskaper hos vektorpotentialer.

a). Om $\overline{B}$ har en vektorpotential $\overline{A}$ så är

$$\nabla \cdot \overline{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \overline{A}) = 0 \,.$$

Detta betyder att vektorfältet $\overline{B}$ kan ha en vektorpotential bara om $\nabla \cdot \overline{B} = 0$.

b). Om $\overline{A}$ är en vektorpotential till $\overline{B}$ så är $\overline{A} + \nabla\Phi$ en vektorpotential till $\overline{B}$. Här är Φ är en skalär funktion. Så för att hitta alla vektorpotentialer till vektorfältet $\overline{B}$ räcker det att först hitta en vektorpotential och sedan lägga till $\nabla\Phi$, med en godtycklig funktion Φ.

Ex. 1 Låt $\overline{B} = x\hat{x} - 2y\hat{y} + z\hat{z}$. Hitta en vektorpotential till vektorfältet $\overline{B}$.
Lösn. 1. Först kontrolleras att

$$\nabla \cdot \overline{B} = 1 - 2 + 1 = 0 \,.$$

2. Vi söker sedan en vektorpotential $\overline{A}$ på formen

$$\overline{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} \,.$$

Det är viktigt att välja en koefficient som 0, i det här fallet $A_z = 0$. Det är möjligt på grund av att vektorpotential är definierad upp till gradienten av en funktion. Vi har

$$\nabla \times \overline{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\hat{x} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{y} + \Big(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Big)\hat{z} \,.$$

Alltså kan likheten $\nabla \times \overline{A} = \overline{B}$ skrivas som

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} = x \,, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = -2y \,, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = z \,. \tag{1}$$

Från de första två ekvationerna fås att

$$A_y = -zx + f(x, y) \,, \quad A_x = -2yz + g(x, y) \tag{2}$$

där f och g två konstanter som kan bero på x och y. Nu används representationerna i (2) för att lösa ut sista ekvationen i (1). Vi har

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -z + \frac{\partial f}{\partial x} + 2z - \frac{\partial g}{\partial y} = z$$

eller

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0\,.$$

Som en lösning till den här ekvationen kan vi ta $f = g = 0$.

Svar: $\overline{A} = -2yz\hat{x} - zx\hat{y}$.

I föregående exempel kan vi även söka en vektorpotential på formen

$$\overline{A}_1 = A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\,.$$

Nu är koefficienten A_x lika med 0. Beräkningarna utföres sedan som ovan. Eftersom

$$\nabla \times \overline{A}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} = \Big(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\Big)\hat{x} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\hat{y} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\hat{z}$$

har vi att

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = x\,, \quad -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -2y\,, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} = z\,. \tag{3}$$

Om vi integrerar de sista två ekvationerna fås

$$A_z = 2yx + f(y,z)\,, \quad A_y = xz + g(y,z)\,.$$

Nu används detta för att lösa första ekvationen i (3)

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 2x + \frac{\partial f}{\partial y} - x - \frac{\partial g}{\partial z} = x\,.$$

Som en lösning kan återigen $f = g = 0$ väljas.

Svar: $\overline{A}_1 = xz\hat{y} + 2yz\hat{z}$.

Observera att vi har fått två olika svar men

$$\overline{A} - \overline{A}_1 = -2yz\hat{x} - 2zx\hat{y} - 2yx\hat{z} = \nabla(-2xyz)\,.$$

Ex. 2 (1997, augusti) Ange en vektorpotential till $\overline{B} = \sin\varphi\hat{\rho} + \cos\varphi\hat{\varphi} + \hat{z}$.

Lösn. Först kontrolleras att

$$\nabla \cdot \overline{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\varphi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial z}1 = 0\,.$$

Vi söker en vektorpotential på formen

$$\overline{A} = A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi}\,.$$

Observera att vi väljer en av koefficienterna (A_z) till 0. Vi har

$$\nabla\times\overline{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\Big(-\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi)\hat{\rho} + \Big(\frac{\partial}{\partial z}A_\rho\Big)\rho\hat{\varphi} + \Big(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}A_\rho\Big)\hat{z}\Big).$$

Ekvationen $\nabla \times \overline{A} = \overline{B}$ medför att

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\varphi) = \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial}{\partial z}A_\rho = \cos\varphi\,, \quad \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}A_\rho\Big) = 1\,. \tag{4}$$

Från de första två ekvationerna får vi att

$$A_\varphi = -z\sin\varphi + f(\rho,\varphi)\,, \quad A_\rho = z\cos\varphi + g(\rho,\varphi)\,.$$

Nu används dessa representationer för att lösa sista ekvationen i (4):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}A_\rho\Big) \\ &= \frac{1}{\rho}(-z\sin\varphi + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f) + z\sin\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi}g) = 1 \end{aligned}$$

eller

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f) - \frac{\partial}{\partial \varphi}g = \rho\,.$$

Man kan ta som en lösning till sista ekvationen

$$f = \frac{\rho}{2} \quad \text{och} \quad g = 0\,.$$

Ex. 3 (*En tillämpning av vektorpotential*) Betrakta två av Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \overline{H} = \overline{J} \quad \text{och} \quad \nabla \cdot \overline{H} = 0 \tag{5}$$

där $\overline{H}$ beskriver ett magnetiskt fält och $\overline{J}$ är strömtätheten. För att lösa första ekvationen behövs en vektorpotential $\overline{A}$ till vektorfältet $\overline{J}$. Sedan ges den allmänna lösningen av

$$\overline{H} = \overline{A} + \nabla\Phi \tag{6}$$

där Φ är en godtycklig funktion. Nu används representationen (6) för att lösa andra ekvationen i (5):

$$\nabla \cdot (\overline{A} + \nabla\Phi) = 0$$

eller

$$\nabla^2\Phi = -\nabla \cdot \overline{A}\,.$$

Detta är Poissons ekvation för Φ som studerades på föreläsning 9. Alltså behöver vi potential, vektorpotential, Poissons och Laplaces ekvationer för att lösa Maxwells system.