Nr 22, 12 maj -05, Amelia 2

22 Vektoranalys och flödesintegraler

22.1 Mera om gradient (∇), divergens ($\nabla\cdot$) och rotation ($\nabla\times$)

Notera att ett **vektorfält** är en funktion $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ (fetstil $\mathbf{F}$) medan ett **skalärt** fält är en funktion $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ (mager stil f). Vi rekapitulerar från förra avsnittet att om f är ett skalärt fält så kan **gradienten** skrivas

$$\text{grad } f = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z).$$

Om $\mathbf{F}$ är ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y, z) = (P, Q, R)$ så är **divergensen**

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = P'_x + Q'_y + R'_z$$

och **rotationen**

$$\text{rot}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Vi har alltså tre operationer med symbolen $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, nämligen ∇ (grad) $\nabla\cdot$ (div) och $\nabla\times$ (rot).

Notera att gradienten verkar på ett skalärt fält men ger ett vektorfält. Divergensen verkar på ett vektorfält men ger ett skalärt fält. Rotationen verkar på ett vektorfält och ger ett vektorfält. Låt oss definiera $C_n(\mathbf{R}^k)$ som mängden av alla vektorfält $D_\mathbf{F} \to \mathbf{R}^3$ som har kontinuerliga partiella derivator upp till och med n på någon öppen delmängd $D_\mathbf{F} \subset \mathbf{R}^3$. Då kan vi säga samma sak som att

$$\begin{aligned} \nabla &: C_n(\mathbf{R}) \to C_{n-1}(\mathbf{R}^3) \\ \nabla\cdot &: C_n(\mathbf{R}^3) \to C_{n-1}(\mathbf{R}) \\ \nabla\times &: C_n(\mathbf{R}^3) \to C_{n-1}(\mathbf{R}^3). \end{aligned}$$

Exempel 1 *(1106) Givet* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - y^3, 3yz, y^3 + z^3)$ *Vilka av följande uttryck har mening:*

a. grad div rot $\mathbf{F}$ *b. grad rot div* $\mathbf{F}$ *c. div grad rot* $\mathbf{F}$ *d. div grad div* $\mathbf{F}$ *e. rot div grad* $\mathbf{F}$ *f. rot rot rot* $\mathbf{F}$*? Beräkna de som har mening.*

Lösning: Med nabla (∇) kan dessa uttryck skrivas

a. $\nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F})$ b. $\nabla(\nabla \times (\nabla\cdot \mathbf{F}))$ c. $\nabla \cdot (\nabla(\nabla\times \mathbf{F}))$ d. $\nabla \cdot (\nabla(\nabla\cdot \mathbf{F}))$ e. $\nabla \times (\nabla \cdot (\nabla\mathbf{F}))$ f. $\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}))$.

Vi kommer att behöva

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot (x^3 - y^3, 3yz, y^3 + z^3) = 3x^2 + 3z + 3z^2. \\ \nabla \times \mathbf{F} &= (\frac{\partial}{\partial y}(y^3 + z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(3yz), \frac{\partial}{\partial z}(x^3 - y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(y^3 + z^3), \frac{\partial}{\partial x}(3yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - y^3)) \\ &= (3y^2 - 3y, 0, 2y^2). \end{aligned}$$

a. Är $\nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F})$ väldefinierat? Här är $\nabla \times \mathbf{F}$ en vektor så $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ har mening. Då är $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}$ ett skalärt fält så gradienten ∇ fungerar. Detta uttryck är väldefinierat. Vi får

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla(\nabla \cdot (3y^2 - 3y, 0, 2y^2)) \\ \nabla(0 + 0 + 0) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

b. Är $\nabla(\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{F}))$ väldefinierat? Här är $(\nabla \cdot \mathbf{F})$ ett skalärt fält, men $\nabla \times$ kan inte verka på ett sådant, så detta uttryck är inte väldefinierat.

c. Är $\nabla \cdot (\nabla(\nabla \times \mathbf{F}))$ väldefinierat? Här är $\nabla(\nabla \times \mathbf{F})$ en gradient av ett vektorfält, som inte har mening.

d. Är $\nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}))$ väldefinierat? Ja, här går vektorer och skalärer ihop. Vi får

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})) &= \nabla \cdot \nabla(3x^2 + 3z + 3z^2) \\ & \nabla \cdot (6x, 0, 3 + 6z) \\ &= 6 + 6 = 12. \end{aligned}$$

e. Är $\nabla \times (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{F}))$ väldefinierat? Nej, för $\nabla \mathbf{F}$ har inte mening. Operatorn ∇ kan bara verka på ett skalärt fält.

f. Är $\nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}))$ väldefinierat? Ja, rotationen avbildar vektorfält på vektorfält, så den kan upprepas. Vi påminner: $\nabla \times \mathbf{F} = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y)$. Vi får

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= (3y^2 - 3y, 0, 2y^2), \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} &= \nabla \times (3y^2 - 3y, 0, 2y^2) \\ &= (4y - 0, 0 - 0, 0 - 6y + 3). \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \times (4y - 0, 0 - 0, 0 - 6y + 3) \\ &= (-6, 0, -4). \end{aligned}$$

Svar: a. $(0, 0, 0)$. b. Nej. c. Nej. d. 12. e. Nej. f. $(-6, 0, -4)$.

22.2 Divergens som källstyrka

Varför är det rimligt att uppfatta divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}$ som källstyrkan av $\mathbf{F}$, alltså hur mycket som skapas i punkten (x, y, z), om $\mathbf{F}$ tolkas som ett massflöde? Detta var en motivation till Gauss' sats, om än satsens bevis var något annat. Den bevisades ju genom att göra itererad integration ett steg i trippelintegralen.

Men om vi tar en liten sfär $S_\varepsilon(\mathbf{a})$ runt punkten $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ och studerar det totala utflödet från denna så är det totala utflödet

$$\iint\limits_{S_\varepsilon(\mathbf{a})} \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS.$$

Enligt Gauss sats är detta lika med

$$\iiint\limits_{K_\varepsilon(\mathbf{a})} \nabla \cdot \mathbf{F} dxdydz,$$

om $K_\varepsilon(\mathbf{a})$ är klotet innanför ytan $S_\varepsilon(\mathbf{a})$. Men om ε är liten och $\nabla \cdot \mathbf{F}$ är kontinuerlig så har vi

$$\iiint\limits_{K_\varepsilon(\mathbf{a})} \nabla \cdot \mathbf{F} dxdydz \approx \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}) \iiint\limits_{K_\varepsilon(\mathbf{a})} dxdydz.$$

Integralkalkylens medelvärdessats säger att skillnaden mellan högerled och vänsterled går mot noll då $\varepsilon \to 0$. Vi har alltså

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}) \approx \frac{\displaystyle\iint\limits_{S_\varepsilon(\mathbf{a})} \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS}{\displaystyle\iiint\limits_{K_\varepsilon(\mathbf{a})} dxdydz}.$$

Härifrån kan vi tolka divergensen $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a})$ som en källstyrka. Den är alltså nettoutflödet $\displaystyle\iint\limits_{S_\varepsilon(\mathbf{a})} \mathbf{F} \cdot \widehat{n} dS$ genom ytan (mängden som skapas) per (/) volymsenhet ($\displaystyle\iiint\limits_{K_\varepsilon(\mathbf{a})} dxdydz$). Det är netto**ut**flödet på grund av att $\widehat{n}$ är utåtriktad normal.

22.3 Lösta exempel med flödesintegraler

Exempel 2 *(11.7b) Beräkna flödesintegralen* $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \widehat{n}\, dS$ *där* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y, y^3 + z, z^3 + x)$ *och* K *är cylindern* $\{x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ *med utåtriktad normal.*

Lösning: Vi har tre begränsningsytor: cylinderns mantelyta, bottenyta och toppyta. Eftersom fältet är deriverbart överallt och ytan är sluten och med utåtriktad normal kan Gauss sats kan användas så snart vektorfältets divergens är beräknad:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \nabla \cdot (x^3 + y, y^3 + z, z^3 + x) \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2. \end{aligned}$$

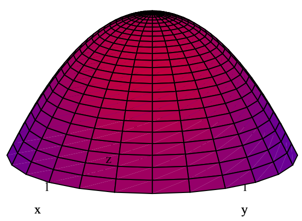
Så vi får

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F}dxdydz = \iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)dxdydz \\
\{\text{cylindriska koord}\} &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 3(r^2+z^2)rdrd\varphi dz = \{\varphi \text{ och } z\text{-integration}\} \\
&= 3[\varphi]_0^{2\pi}\int_0^1 [(r^2z+\frac{1}{3}z^3)]_0^1 rdr \\
&= 6\pi[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{6}]_0^1 = 6\pi(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) \\
&= 6\pi\frac{3+2}{12} = \frac{5\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\; dS = \frac{5\pi}{2}$.

Exempel 3 *(11.7b) Beräkna flödesintegralen* $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\; dS$ *där* $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, xz, 1-z-yz)$ *och* K *är paraboloiden* $\{0 \le z \le 1-x^2-y^2\}$, *med utåtriktad normal.*

Lösning: Skärningen mellan paraboloiden och xy-planet ges av $0 = 1-x^2-y^2$, det är alltså en cirkel med radie 1.



Paraboloiden $0 \le z \le 1-x^2-y^2$.

Vi har

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z) &= \nabla\cdot(xy, xz, 1-z-yz) \\
&= y+0-1-y = -1.
\end{aligned}
$$

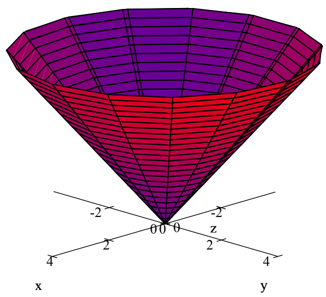
Gauss' sats ger då

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n} dS &= \iiint\limits_V \nabla\cdot\mathbf{F} dxdydz = \iiint\limits_V (-1) dxdydz \\
\{\text{cylindriska koord.}\} &= -\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{x^2+y^2} dz\right) r dr d\varphi \\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi}(x^2+y^2) r dr d\varphi \\
&= -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi \\
&= -2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS = -\frac{\pi}{2}$.

Exempel 4 *Beräkna flödesintegralen* $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}\ dS$ *där* $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{(y,-x,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *och* K *är konen* $\sqrt{x^2+y^2} = z \leq 4$, *med nedåtriktad normal.*

Lösning: Vi har en kon med höjd 4



Observera att flödet är uppåt (z-komponenten $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$) och normalen nedåt så man kan vänta sig att integralen blir negativ.

Divergensen är i detta fall

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \frac{(y,-x,z)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{-yx}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Den är inte definierad i origo, så detta är en generaliserad ytintegral. Om vi betecknar konens cirkulära toppyta med $S_1 = \{x^2+y^2 \leq 4, z = 4\}$ med normal $(0,0,1)$, Så får vi

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iint\limits_{S+S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS - \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS \\
\{\text{Gauss' sats}\} &= \iiint \frac{1}{r}dxdydz - \iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS.
\end{aligned}
$$

Cylindriska koordinater täcker volymen med gränserna $r \leq z \leq 4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ och $0 \leq r \leq 4$. Vi får

$$
\begin{aligned}
\iiint \frac{1}{r}dxdydz &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 \frac{1}{r} r dr d\varphi dz \\
&= 2\pi \int_0^4 (4-r)dr = 2\pi(16-8) \\
&= 16\pi.
\end{aligned}
$$

Gränsövergången i origo, där integralen är generaliserad, vållade inte några problem.

På S_1 har vi $z = 4$, så vi får med polära koordinater

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{S_1} \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS &= \iint\limits_{S_1} \frac{(y,-x,4)}{\sqrt{x^2+y^2}}(0,0,1)dxdy \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{4}{r} r dr d\varphi = 32\pi.
\end{aligned}
$$

Så

$$
\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS = 16\pi - 32\pi = -16\pi.
$$

Svar: $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\widehat{n}dS = -16\pi.$