Nr 15, 19 april -05, Amelia 2

15 Multipelintegraler, sfäriska koordinater, volymberäkningar

15.1 Multipelintegraler

Det finns många tillämpningar där fler än tre variabler är aktuella. I statistik kan vi vilja undersöka en situation med fyra stokastiska variabler. Om då $f(x,y,z,u)$ är frekvensfunktionen, så bör dess integral över alla fyra variablerna vara lika med ett. En annan tillämpning är väderlek. En vädersituation kan karaktäriseras av fem variabler, lufttryck, luftfuktighet, temperatur, vindstyrka och vindriktning. Variablerna måste inte vara geometriska variabler i det fysiska rummet.

Helt i linje med matematikens strävan att generalisera, och att göra det geom att ta fasta på kalkylerna snarare än på de ursprungliga applikationerna, kan vi även definiera en kvadruppelintegral:

$$\iiiint\limits_D f(x,y,z,u)dxdydzdu$$

över ett område $D \subset \mathbf{R}^4$. Om området är av typ $D = \{a \leq x \leq A, b(x) \leq y \leq B(x), c(x,y) \leq z \leq C(x,y), g(x,y,z) \leq u \leq G(x,y,z)\}$ så kan den beräknas med itererad integration:

$$\iiiint\limits_D f(x,y,z,u)dxdydzdu =$$
$$\int_a^A (\int_{b(x)}^{B(x)} (\int_{c(x,y)}^{C(x,y)} (\int_{g(x,y,z)}^{G(x,y,z)} f(x,y,z,u)du)dz)dy)dx$$

om f är integrerbar. En multipelintegral av en funktion av n variabler skrivs

$$\int \cdots \int\limits_D f(x_1, ...x_n)dx_1...dx_n.$$

Denna integral är intressant i statistik för en frekvensfunktion med n stokastiska variabler.

Exempel 1 *(916l) Beräkna* $\iiiint\limits_D xyzu \; dxdydzdu$ *där* D *ges av* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq 2y$ *och* $0 \leq u \leq 2z$.

Lösning: De åtta villkoren, två för varje variabel, har den karaktären att de genast kan användas som gränser vid itererad integration:

$$
\begin{aligned}
\iiiint_D xyzu\ dxdydzdu &= \int_0^1 (\int_0^x (\int_0^{2y} (\int_0^{2z} xyzudu)dz)dy)dx \\
\{u\text{-integration}\} &= \int_0^1 (\int^x (\int_0^{2y} xyz[\frac{u^2}{2}]_0^{2z} dz)dy)dx \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= 2\int_0^1 (\int_0^x (\int_0^{2y} xyz^3 dz)dy)dx \\
\{z\text{-integration}\} &= 2\int_0^1 (\int_0^x xy[\frac{z^4}{4}]_0^{2y} dy)dx \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= 8\int_0^1 (\int_0^x xy^5 dy)dx \\
\{y\text{-integration}\} &= 8\int_0^1 x[\frac{y^6}{6}]_0^x dx \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= 8\int_0^1 x\frac{x^6}{6} dx \\
\{x\text{-integration}\} &= \frac{4}{3}[\frac{x^8}{8}]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

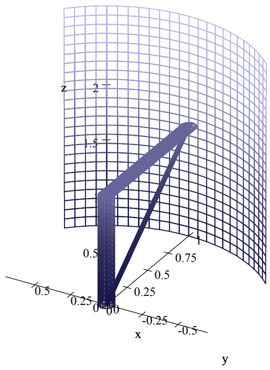
Svar: $\iiiint_D xyzu\ dxdydzdu = \frac{1}{6}$.

15.2 Sfäriska koordinater

I cylindriska koordinater

$$
\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} .
$$

är avståndet från en punkt (x, y, z) till origo $\sqrt{r^2 + z^2}$ (vi byter namn på vinkeln från θ till φ för att ha samma notation som i boken). Detta följer från Pythagoras sats ty vi har en rätvinklig triangel med hörn i $(0, 0, 0)$, $(0, 0, z)$ och (x, y, z), och avståndet mellan de två sistnämnda punkterna är r.



I sfäriska koordinater har variabeln r en annan betydelse än i cylindriska, nämligen avståndet till origo (tunn linje i figuren). Låt oss beteckna detta avstånd med ρ (uttal: "rå"), som är den grekiska motsvarigheten till bokstaven "r". Om vinkeln i origo i triangeln beteckas med θ (uttal: "fi"), mellan riktningen (x, y, z) och z-axeln (som är riktningen $(0, 0, 1)$).

Denna triangel är rätvinklig med hypotenusa ρ och katetrar r och z. Då har vi tydligen att

$$\rho \sin\theta = r$$
$$\rho \cos\theta = z$$

Sätter vi in detta i cylindriska koordinater får vi sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}.$$

Man använder dock oftare r än ρ. Här använde vi ρ för att göra det klart att r i cylindriska och sfäriska koordinater är olika variabler, och för att visa hur sfäriska kan härledas från cylindriska (vilka är polära koordinater där man hängt på z också). Vi byter till r och har då

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}.$$

Notera att vinkeln φ inte finns med i z-koordinaten ($z = \rho \cos\theta$). Denna vinkel är samma vinkel som i cylindriska koordinater. Vi har följande tolkningar av de tre koordinaterna:

r – avståndet mellan $(0, 0, 0)$ och (x, y, z).

θ – vinkeln mellan riktningen (x, y, z) och positiva z-axeln. Här är θ maximalt π, i vilket fall vi befinner oss på negativa z-axeln. Så $0 \leq \theta \leq \pi$.

φ – om punkten (x, y, z) projiceras ner i xy-planet fås $(x, y, 0)$, och vinkeln θ är vinkeln mellan riktningen $(x, y, 0)$ och positiva x-axeln. Denna vinkel (samma som polära koordinater) går runt hela varvet, så $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Observera att de två vinklarna inte har samma gränser.

Vad är funktionaldeterminanten för sfäriska koordinater? Det är bara att derivera koordinatsambanden:

$$\begin{aligned}
\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \\
\{\text{utveckla tredje raden}\} &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} - \\
&\quad -(-r\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta \left(r^2\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\right) + \\
&\quad r\sin\theta\left(r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) \\
\{\text{två trig. ettor}\} &= r^2\cos\theta\left(\cos\theta\sin\theta\right) + r^2\sin\theta(\sin^2\theta) \\
\{\text{ännu en trig. etta}\} &= r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

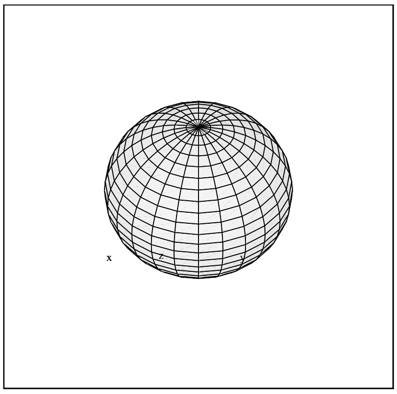
Så funktionaldeterminanten för polära koordinater är $r^2\sin\theta$, där θ är vinkeln till positiva z-axeln. Detta kan skrivas som

$$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi.$$

Vinklarna har gränserna $0 \leq \theta \leq \pi$ respektive $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Notera att θ respektive φ motsvarar latituder och longituder på en glob. Vinkeln $\theta = 0$ är nordpolen, $\theta = \pi$ är sydpolen och $\theta = \frac{\pi}{2}$ är ekvatorn. En vinkel φ =konstant är en "lodrät" linje – en longitud, även kallat meridian. Om vi låter Greenwichmeridianen som går genom London svara mot $\varphi = 0$ så kan vi definiera östra halvklotet som $0 \leq \varphi \leq \pi$ och västra halvklotet som $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$. Då tillhör emellertid Europa väster om Greenwichmeridianen västra halvklotet – φ något mindre än 2π,alternativt φ något mindre än 0.

Nedan har vi ytan $r = 1$ som är en sfär, vilken byggs upp av kurvor $\{r = 1, \theta = a\}$ respektive $\{r = 1, \varphi = b\}$ för många olika värden på a och b. I en kurva $\{r = 1, \theta = a\}$ är alltså två parametrar fixa (här r och θ), så den tredje (φ) kan variera fritt, och definierar en kurva (ges av *en* parameter).



Kurvor θ =konstant och φ =konstant.

Observera att eftersom r är avståndet till origo, så det gäller att $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, alltså även $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Det är relationer som vi använder ofta.

Exempel 2 *(921y) Beräkna* $\displaystyle\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ *där* D *är klotet* $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Lösning: Här har området sfärisk symmetri, och vi får i integranden $\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r^2}$. Sfäriska koordinater borde vara framgångsrika. Vi får då:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz &= \iiint\limits_E \frac{1}{r^2}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 dr \\
&= [\varphi]_0^{2\pi}[\cos\theta]_0^{\pi}[r]_0^1 \\
&= 2\pi\cdot(1-(-1))\cdot 1 = 4\pi.
\end{aligned}$$

Observera att vi beräknade en generaliserad integral, ty integranden $\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ är obegränsad i origo. Nivåytor $\frac{1}{x^2+y^2+z^2} = C$ till denna funktion är

$$x^2+y^2+z^2 = (\frac{1}{\sqrt{C}})^2 = R^2,$$

så på ett klot med radie $\frac{1}{2}$ runt origo har funktionen värdet $C = 4$,och på ett klot med radie $\frac{1}{3}$ har funktionen värdet $C = 9$. Vi har givetvis allt större värden ju mindre radier R vi har, enligt $C = \frac{1}{R^2}$.

Svar: $\displaystyle\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}dxdydz = 4\pi$.

Exempel 3 *Beräkna* $\iiint_D e^{2z}dxdydz$ *då* $D = \{z \le -\sqrt{x^2+y^2+z^2}, x \ge 0\}$.

På konen $z = -\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ är vinkeln till positiva z-axeln lika med $\frac{3\pi}{4}$, så vi får får θ gränserna $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$ (45 sydlig bredd), och $x \ge 0$ svarar mot $0 \le \varphi \le \pi$ (östra halvklotet). vi har ingen begränsning på r så r har gränserna 0 och ∞.

Vi får med sfäriska koordinater genom att använda $z = r\cos\theta$ i exponenten i e^{2z}:

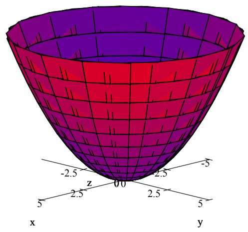
$$
\begin{aligned}
\iiint_D e^{2z}dxdydz &= \iiint_E e^{2r\cos\theta}r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \\
&= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty dr \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi e^{2r\cos\theta}r^2\sin\theta d\theta \\
\{\text{använd att } e^{a+b} \text{ är } e^a e^b\} &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty r^2 dr \int_{\frac{3\pi}{4}}^\pi e^{2r\cos\theta}\sin\theta d\theta \\
\{\theta\text{-integration}\} &= \pi \int_0^\infty r^2[-\frac{1}{2r}e^{2r\cos\theta}]_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\theta=\pi} dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty r(-e^{2r\cos\pi} + e^{r\cos\frac{3\pi}{4}})dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty r(-e^{-2r} + e^{-\sqrt{2}r})dr \\
\{\text{partialintegration}\} &= \frac{\pi}{2}[r(\frac{1}{2}e^{-2r} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}r})]_0^\infty - \frac{\pi}{2}\int_0^\infty (\frac{1}{2}e^{-2r} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}r})dr \\
&= \pi(0 - \frac{\pi}{2}[-\frac{1}{4}e^{-2r} + \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}r}]_2^\infty \\
&= \pi(-\frac{\pi}{2}(\frac{1}{4}e^{-0} - \frac{1}{2}e^{-0}) = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

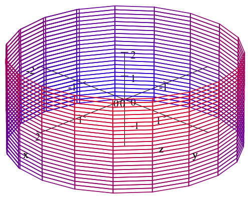
Svar: $\iiint_D e^{2z}dxdydz = \frac{\pi}{8}$.

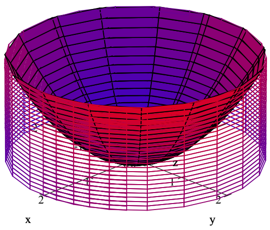
15.3 Volymberäkningar

Exempel 4 *(927b) Beräkna volymen av kroppen* K *som begränsas av cylindern* $x^2+y^2=4$, *paraboloiden* $z = x^2+y^2$ *och planet* $z = 0$.

Lösning: Vi har en lodrät cylinder med radie 2 runt z-axeln, och en "lodrät" paraboloid vilken som bekant är en skål (rotera parabeln $y = x^2$ runt z-axeln) med minimum i origo. $(2\cos x, 2\sin x, y)$







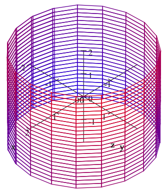
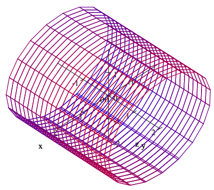
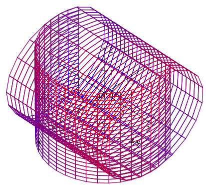
Kvarvarande volym.

Vi använder här cylindriska koordinater. Då ska vi i z-led gå från $z = 0$ till $z = r^2$, medan gränserna för r är 0 till 2 respektive 0 till 2π (hela varvet). Vi får då volymen

$$\begin{aligned}
\iiint_K dxdyxz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{r^2} r dz \\
&= [\varphi]_0^{2\pi} \int_0^2 [rz]_0^{r^2} dr \\
&= 2\pi \int_0^2 r^3 dr \\
&= 2\pi[\frac{1}{4}r^4]_0^2 = 8\pi.
\end{aligned}$$

Svar: Volymen är 8π.

Exempel 5 *(927j) Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av cylindrarna $x^2 + y^2 = a^2$ och $x^2 + z^2 = a^2$.*

Lösning: Med polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

får vi här ytan $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ att integrera, där området är $r \leq a$. Det ger

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{K} dxdyxz &= 2 \iiint\limits_{K \text{ då } x\geq 0} dxdydz \\
&= 2\int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2\cos^2\varphi}\, r dr d\varphi \\
\{\text{integration av } r\} &= 2\int_0^{2\pi} [-\frac{1}{3\cos^2\varphi}\left(a^2 - r^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}]_0^a d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} [-\frac{1}{3\cos^2\varphi}\left(a^2 - a^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\cos^2\varphi}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}})d\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} [-\frac{1}{3\cos^2\varphi}\left(a^2 - a^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3\cos^2\varphi}\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}})d\varphi \\
\{\text{div. förenklingar}\} &= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \frac{16a^3}{3}
\end{aligned}$$

ty $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = 2$. Detta kan beräknas på följande sätt.

Funktionen $\frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}$ är problematisk i $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ty där har vi $\frac{0}{0}$. Vi kan inte beräkna de två integralerna separat

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi$$

ty då är de båda divergenta i $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Men vi kan bestämma primitiv funktion till dem separat,

$$\int \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi = \int \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi - \int \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi,$$

och sedan i summan av de primitiva funktionerna sätta in gränserna. Det är lämpligt för de två termerna "behöver" olika substitutioner. Vi får

$$\int \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = \{t = \tan\varphi\} = \int dt = t = \tan\varphi + C,$$

medan

$$\begin{aligned}\int \frac{(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi &= \{\cos\varphi = t, -\sin\varphi d\varphi = dt\} \\ &= \int_1^0 \frac{1-t^2}{t^2} dt = \frac{1}{t} + t = \frac{1}{\cos\varphi} + \cos\varphi + C.\end{aligned}$$

Så en primitiv funktion till $\frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi}$ är $\frac{1}{\cos\varphi} - \cos\varphi - \tan\varphi$ (vi tar $C = 0$). Vi

får då

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} d\varphi &= [\frac{1}{\cos\varphi} + \cos\varphi + \tan\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= (\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\cos\varphi} + \tan\varphi) + 0) - (-1 + -1 + 0) \\ &= 2\end{aligned}$$

ty

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\cos\varphi} + \tan\varphi) &= \lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} = \{\text{sätt } \varphi - \frac{\pi}{2} = s\} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{1+\sin(s+\frac{\pi}{2})}{\cos(s+\frac{\pi}{2})} = \lim_{s\to 0} \frac{1+\cos s}{-\sin s} \\ \{\text{l'Hospitals regel}\} &= \lim_{s\to 0} \frac{\sin s}{-\cos s} = \frac{0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

Svar: $\iiint\limits_K dxdyxz = \frac{16a^3}{3}$.