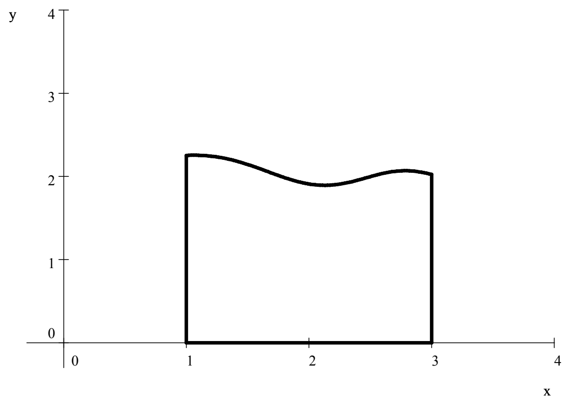
Nr 14, 18 april -05, Amelia 2

14 Trippelintegraler – integration av funktioner av tre variabler

14.1 Areor och volymer

14.1.1 Area som enkelintegral och som dubbelintegral

Som bekant kan enkelintegralen $\int_a^b f(x)dx$ kan tolkas som arean under $f(x)$ på intervallet $[a, b]$, enligt följande figur.



Arean under grafen för $f(x)$, mellan a och b.

Men denna area kan också tolkas som en dubbelintegral. Om vi kallar området i figuren för D, dvs $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$, och integrerar en funktion vars höjd är 1 så är ju dess volym lika med basarean, eftersom volymen är basarean gånger höjden. Alltså: volymen är i detta fall basarean gånger ett. Denna dubbelintegral, som alltså på en gång representerar volymen av en kropp och arean av en yta (eftersom höjden överallt är 1), kan tecknas som följer:

$$\iint_D 1dxdy = \iint_D dxdy.$$

Om vi integrerar den med upprepad integration får vi mycket riktigt tillbaka den gamla enkelintegralen $\int_a^b f(x)dx$. Då måste vi integrera i y-led först eftersom gränserna i y beror på x :

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D 1dxdy &= \int_a^b (\int_0^{f(x)} dy)dx \\
\{y\text{-integration}\} &= \int_a^b [y]_0^{f(x)}dx \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \int_a^b (f(x)-0)dx \\
&= \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Med dubbelintegraler kan vi med itererad integration integrera områden av typen $D = \{(x,y) : g(x) \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$, dvs områden som är begränsade av två funktioner i den ena riktningen, och konstanter i den andra. Vi klarar mera generella områden än detta genom att dela upp i delområden av denna typ. Det är därför praktiskt att definiera arean $A(D)$ av ett generellt område D som

$$A(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Detta skrivsätt är oberoende av om D har den ovan beskrivna integrabla formen ($g(x) \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b$) eller inte. Det är alltså en dubbelintegral med den mycket enkla integranden 1. Ty en kropp med höjden 1 överallt över ett visst tvådimensionellt område har en volym som är lika med arean av det tvådimensionella området.

14.1.2 Dubbelintegral som massan av en skiva

Men en dubbelintegral måste inte representera en volym, även om det är den tillämpning som vi oftast har framhållit. En dubbelintegral kan också representera den totala massan av en skiva, där masstätheten i punkten (x,y) är $f(x,y)$. Om vi tittar på en liten ruta $\{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < x_{j+1}\}$, så är dess area $(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$, och dess massa är ungefär $f(x_i,y_j)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ eftersom f är masstätheten. Om indelningen är liten och f kontinuerlig i rutan så varierar inte f:s värden i rutan, så värdet $f(x_i,y_j)$ (i ett hörn i rutan) ger inte stort fel.

Den summa vi får när vi adderar massan i alla rutor är en Riemannsumma. När finheten går mot noll får vi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

som alltså här representerar inte volymen under en yta utan totala massan av en skiva med varierande masstäthet – $f(x,y)$.

14.1.3 Trippelintegral – massa hos en kropp och volym

För att beräkna totala massan av en tredimensionell kropp där masstätheten varierar i kroppen, beskriven av en funktion $f(x, y, z)$ av tre variabler, behöver vi summera bidragen över tre dimensioner – inte bara två (dubbelintegral) eller en (enkelintegral), som tidigare. Det är en tillämpning av en trippelintegral. En trippelintegral kan alltså beteckna masstätheten i en tredimensionell kropp D med masstätheten $f(x, y, z)$.

Trippelintegralen kan också tolkas som måttet av en fyrdimensionell volym begränsad mellan en tredimensionell volym och xyz-rymden. Detta är inget problem för matematiken, men eftersom vi upplever tre rumsdimensioner i vår tillvaro är vi inte alls vana vid fyra rumsdimentioner, och detta upplevs som en esoterisk tolkning av trippelintegral.

Analog med hur vi ovan definierade arean av ett område $D \subset \mathbf{R}^2$ som dubbelintegralen $\iint\limits_D dxdy$, kan vi definiera volymen av ett område $D \subset \mathbf{R}^3$ som

$$V(D) = \iiint\limits_D dxdydz.$$

Här har vi "höjden" lika med 1 i den extra dimensionen, vilket gör att måttet av denna fyrdimensionella volym är lika med måttet i den lägre dimensionen, som är den tredimensionella volymen.

14.2 Trippelintegraler – integration av funktioner av tre variabler

Helt analogt med dubbelintegralen för en funktion av två variabler, kan man för en funktion av tre variabler $f(x, y, z)$ på ett område D i $\mathbf{R}^3$ definiera trippelintegralen som gränsvärdet för Riemannsummor

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i)V(R_i),$$

där $\{R_i\}$ är en samling rätblock $\{a_i \le x_i \le A_i, b_i \le y_i \le B_i, c_i \le z_i \le C_i\}$ som täcker D. Överlappet mellan varje par av rätblock måste ha volym noll – de får ha högst en sida gemensam. Rätblock nummer i har då volym $V(R_i) = (A_i - a_i)(B_i - b_i)(C_i - c_i)$ – längen gånger bredden gånger djupet. Punkten (x_i, y_i, z_i) är någon punkt i R_i. Notera att $\cup R_i - D$ är de punkter som ligger i rätblocksunionen men inte i D, medan $D - \cup R_i$ är de punkter som ligger i D men inte i rätblocksunionen. Dessa två mängder måste krympa mot noll, ty rätblocksunionen ska ju uppskatta D.

Om varje gränsövergång går mot samma tal då indelningens finhet **och** volymen av mängden $(\cup R_i - D) \cup (D - \cup R_i)$ går mot noll, så är f **integrerbar**. Det tal som gränsövergången går mot betecknas med trippelintegralen $\iiint\limits_D f(x, y, z)dxdydz$:

$$\sum_i f(x_i, y_i, z_i)V(R_i) \to \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz.$$

Detta definierar trippelintegral, helt analogt med enkelintegral och dubbelintegral.

14.3 Itererad integration

En trippelintegral av en integrerbar funktion $f(x, y, z)$ på ett område D i $\mathbf{R}^3$ som är ett rätblock rätblock $D = \{a \le x \le A, b \le y \le B, c \le z \le C\}$ ger tre enkelintegraler med konstanta gränser. Emellertid kommer första integrationen oftast att innehålla två variabler som behandlas som konstanter (de två som inte integreras med avseende på), andra integrationen innehåller en konstant och den tredje integrationen är en vanlig enkelintegral.

Sats 1 *Om f är integrerbar på $D = \{a \le x \le A, b \le y \le B, c \le z \le C\}$, så kan trippelintegralen beräknas med itererad integration:*

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^A (\int_b^B (\int_c^C f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

I denna formulering görs alltså x först, därefter y först, därefter z. Den itererade integrationen kan alternativt utföras i någon av de andra fem ordningarna: $x \to z \to y$, $y \to x \to z$, $y \to z \to x$, $z \to x \to y$ eller $z \to y \to x$. I värsta fall kan integrationen utföras i bara en av de sex möjliga ordningarna. Om den kan utföras i flera av dem så kommer de alla att ge samma resultat, ty det är bara olika sätt att beräkna samma kvantitet: det som Riemannsummorna konvergerar mot.

Integralen kan också skrivas utan parenteser på följande sätt:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x,y,z)dz$$

eller

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^A \int_b^B \int_c^C f(x,y,z)dxdydz.$$

Exempel 2 *(916b) Beräkna $\iiint\limits_D (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})dxdydz$ där D är kuben $D = \{1 \le x \le a, 1 \le y \le a, 1 \le z \le a\}$.*

Lösning: Vi har

$$\iiint\limits_D (\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})dxdydz = \iiint\limits_D \frac{1}{x}dxdydz + \iiint\limits_D \frac{1}{y}dxdydz + \iiint\limits_D \frac{1}{z}dxdydz,$$

och av symmetriskäl måste de tre integralerna vara lika. Området är symmetriskt, och man kan byta variabler i en av dem för att få en annan av de tre. Således:

$$\begin{aligned}
\iiint_D (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})dxdydz &= 3\iiint_D \frac{1}{x}dxdydz \\
&= 3\int_1^{a+1} dx \int_1^{a+1} dy \int_1^{a+1} \frac{1}{x}dz \\
\{\text{första integrationen}\} &= 3\int_1^{a+1} dx \int_1^{a+1} [z\frac{1}{x}]_1^{a+1} dy \\
\{\text{insättning av gränser för } z\} &= 3\int_1^{a+1} dx \int_1^{a+1} a\frac{1}{x}dy \\
\{\text{andra integrationen}\} &= 3\int_1^{a+1} [a\frac{1}{x}y]_{y=1}^{y=a+1} dx \\
\{\text{insättning av gränser för } y\} &= 3\int_1^{a+1} a^2\frac{1}{x}dx \\
\{\text{tredje integrationen}\} &= 3[a^2\ln x]_1^{a+1} \\
&= 3a^2\ln(a+1) - a^2\ln 1 \\
\{\ln 1 \text{ är } 0\} &= 3a^2\ln(a+1).
\end{aligned}$$

Det är svårare att göra meningsfulla figurer för integrationsområdet för en trippelintegral.

Svar: $\iiint_D (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})dxdydz = 3a^2\ln(a+1)$.

Det är klart att inte alla gränserna behöver vara konstanta – vi kan integrera över andra områden än rätblock. Här integrerar vi i första integrationen mellan två ytor ($z = c(x,y)$ och $z = C(x,y)$), varefter vi har en dubbelintgral. Den löses genom att integrera mellan två kurvor ($y = b(x)$ och $z = B(x)$), följt av två konstanter ($x = a$ och $x = A$).

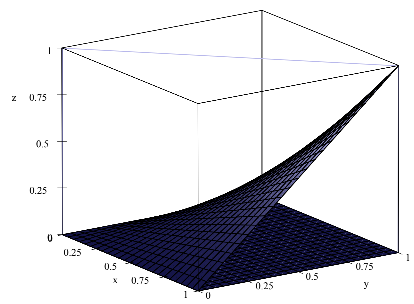
Sats 3 *Om f är integrerbar på $D = \{a \le x \le A, b(x) \le y \le B(x), c(x,y) \le z \le C(x,y)\}$, så kan trippelintegralen beräknas med itererad integration:*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^A (\int_{b(x)}^{B(x)} (\int_{c(x,y)}^{C(x,y)} f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Exempel 4 *(916e) Beräkna $\iiint_D xy^2z^3dxdydz$ om D begränsas av $z = xy, y = x, x = 1$ och $z = 0$..*

Lösning: Variablerna x och y begränsas av $x = 1$ och $y = x$. Dessutom ska $z = xy$ vara positiv (vi har gränsen $z = 0$), så vi får också kravet $y \ge 0$. Så z

går mellan 0 och xy över triangeln i xy-planet som bestäms av $x = y$ till $x = 1$ och då $y = 0$ till $y = 1$. Detta är gränserna.



$z = xy$ och $z = 0$

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_D xy^2z^3dxdydz &= \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^{xy} xy^2z^3dz \\
\{\text{första integrationen, i } z\text{-led}\} &= \int_0^1 dy \int_y^1 [xy^2\frac{1}{4}z^4]_0^{xy}dx \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \frac{1}{4}\int_0^1 dy \int_y^1 x^5y^6dx \\
\{\text{andra integrationen, i } x\text{-led}\} &= \frac{1}{24}\int_0^1 [x^6\frac{1}{6}y^6]_{x=y}^{x=1}dy \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \frac{1}{24}\int_0^1 (y^6 - y^{12})dy \\
\{\text{tredje integrationen, i } y\text{-led}\} &= \frac{1}{24}(\frac{1}{7} - \frac{1}{13}) \\
&= \frac{1}{364}..
\end{aligned}
$$

Svar: $\frac{1}{364}$.

14.4 Variabelsubstitution i trippelintegraler

Om $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ är en inverterbar avbildning från $D \subset \mathbf{R}^3$ till $E \subset \mathbf{R}^3$ så är dess jacobian följande matris av förstaderivator, som vi har (minst) tre skrivsätt för:

$$
\begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = J(u,v,w).
$$

Determinanten av jacobianen är **funktionaldeterminanten**:

$$F(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix},$$

och beskriver den lokala volymsförstoringen – dvs volymsförstoringen nära punkten (u, v, w).

Sats 5 *Om $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ är en inverterbar och differentierbar avbildning från integrationsområdet D till ett område E, och f är integrerbar på D, så gäller*

$$\iint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_E f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|F(u,v,w)|dudvdw.$$

I integranden absolutbeloppet får vi en faktor som är den lokala volymförstoringen ($|J(u,v,w)|$), på liknande sätt som vi för en dubbelintegral fick absolutbeloppet av den lokala ytförstoringen som en faktor i integranden. Man kan säga att

$$dxdydz = |F(u,v,w)|dudvdw.$$

Denna likhet kan ges en strikt matematisk mening, och har konkret mening i en Riemannsumma, i vilket fall vi kan ersätta dx, dy och dz med små tal $\Delta x, \Delta y$ och Δz som är sidor i ett litet rätblock. Då är vänsterledet $\Delta x\Delta y\Delta z$ volymen av rätblocket, $\Delta u\Delta v\Delta w$ är volymen av motsvarande rätblock efter substitutionen, och faktorn $|F(u,v,w)|$ är den lokala ytförstoringen, som också kan skrivas $\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta u\Delta v\Delta w}$. Alltså

$$|F(u,v,w)| \approx \frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta u\Delta v\Delta w}.$$

Så

$$\Delta x\Delta y\Delta z = |F(u,v,w)|\Delta u\Delta v\Delta w$$

är högst rimligt.

Exempel 6 *(921q) Beräkna $\iiint_D (x-y-z)dxdydz$ över området D som begränsas av planen $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$ och $2x-z=1$.*

Lösning: Enklaste sättet att hantera geometrin är här att sätta $u = x+y+z$, $v = x+y-z$ och $w = x-y-z$. Då blir $u = 0$, $v = 0$ och $w = 0$ gränsytor till området, och gränser i den itererade integralen efter variabelsubstitution. Men vad blir ytan $2x - z = 1$ i variablerna u, v, w?

Vi löser ut x och y som funktioner av u, v och w, det behöver vi även för att uttrycka integranden $x - y - z$ i u, v, w.

Subtraktion av $u = x+y+z$ och $v = x+y-z$ ger $2z = u-v$, alltså $z = \frac{u-v}{2}$. Subtraktion av $v = x+y-z$ och $w = x-y-z$ ger $2y = v-w$, alltså $y = \frac{v-w}{2}$.

Kvar är att lösa ut x. Från $w = x - y - z$ får vi $x = w + y + z$, och insättning ger

$$x = w + \frac{v-w}{2} + \frac{u-v}{2} = \frac{u+w}{2}.$$

Så ytan $2x - z = 1$ är

$$2\frac{u+w}{2} - \frac{u-v}{2} = 1,$$

alltså $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + w = 1$. Detta är ett plan som skär koordinataxklarna i $(u, v, w) = (1, 0, 0), (0, 2, 0)$ och $(0, 0, 2)$.

Därmed kan vi bestämma den itererade trippelintegralens gränser. Om vi integrerar w först ska då w gå mellan $w = 0$ och detta plan, dvs $w = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$. Detta plans skärning med $w = 0$ är $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = 1$, som ger gränserna i andra integrationen. Tar vi den i v-led så blir gränserna från $v = 0$ till $v = 2 - u$. Slutligen blir då gränserna i u-led $u = 0$ till $u = 2$.

Integranden blir

$$\begin{aligned} x - y - z &= \frac{u+w}{2} - \frac{v-w}{2} - \frac{u-v}{2} \\ &= w. \end{aligned}$$

Funktionaldeterminanten är

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

Så $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = -\frac{1}{4}$, och $dxdydz = \frac{1}{4}dudvdw$.
Vi får då integralen

$$\iiint_D (x - y - z)dxdydz = \iiint_E w\frac{1}{4}dudvdw,$$

vilken kan beräknas som itererad integral:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D (x-y-z)dxdydz &= \frac{1}{4}\int_0^2 (\int_0^{2-u} (\int_0^{1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v} wdw)dv)du \\
\{w\text{-integration}\} &= \frac{1}{4}\int_0^2 (\int_0^{2-u} [\frac{w^2}{2}]_0^{1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v} dv)du \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \frac{1}{8}\int_0^2 (\int_0^{2-u} (1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v)^2 dv)du \\
\{v\text{-integration}\} &= \frac{1}{8}\int_0^2 [-\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v)^3]_0^{2-u} dv)du \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= -\frac{1}{12}\int_0^2 ((1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}(2-u))^3-(1-\frac{1}{2}u)^3)du \\
\{\text{förenkling}\} &= -\frac{1}{12}\int_0^2 (\frac{1}{8}u^3-\frac{3}{4}u^2+\frac{3}{2}u-1)du \\
\{u\text{-integration}\} &= -\frac{1}{12}[\frac{1}{32}u^4-\frac{1}{4}u^3+\frac{3}{4}u^2-u]_0^2 \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= -\frac{1}{12}(\frac{1}{2}-2+3-2) \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Svar: $\iiint\limits_D (x-y-z)dxdydz = \frac{1}{24}$.

14.4.1 Cylindriska koordinater

Polära koordinater är en tvådimensionell variabelsubstitution. Polära koordinater i tre dimensioner där bara z-koordinaten får hänga med oförändrad kallas **cylindriska koordinater**. Alltså:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}.$$

Geometriskt kan variabelsubstitutionen kännas igen på dess **koodinatytor**: r =konstant, θ =konstant och z =konstant. Om dessa ytor är begränsningar i en trippelintegral så talar det för att cylindriska koordinater bör användas, ty då blir motsvarande integrationsgränser konstanter.

Ytorna z =konstant är givetvis plan parallella med xy-planet.

En koordinatyta θ =konstant kommer från motsvarigheten för polära koordinater: som är en stråle från origo med vinkel θ till positiva x-axeln. Eftersom ekvationen θ =konstant inte sätter något villkor för z, är alla z under och över strålen tillåtna. Det ger ett halvplan som "startar" i z-axeln och har vinkel θ till positiva x.axeln.

En koordinatyta r =konstant är en cylinder med z-axeln som centrumaxel. Den "ärvs" från polära koordinater, där r =konstant är en cirkel med centrum i origo. Eftersom värdet på z inte begränsas på något sätt av en ekvation r =konstant satisfieras denna ekvation av alla möjliga värden på z (uppåt och neråt), vilket ger en cylinder från cirkeln.

För att göra en variabelsubstitution med cylindriska koordinater behöver vi dess funktionaldeterminant. Den är lätt att beräkna:

$$\det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_z \\ y'_r & y'_\theta & y'_z \\ z'_r & z'_\theta & z'_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Tredje raden och tredje kolonnen består av enbart nollor utom en etta – vilket avspeglar att cylindriska koordinater är en tvådimensionell substitution som också kan användas i tre dimension. Om determinanten utvecklas längs tredje raden så fås

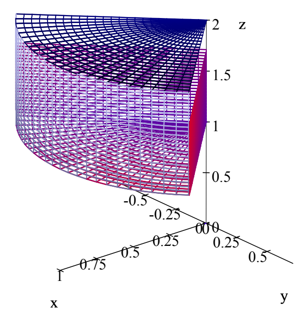
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}.$$

vilket är precis funktionaldeterminanten för polära koordinater i två dimensioner. Vi har redan beräknat den till r. Således gäller för cylindriska koordinater att

$$dxdydz = rdrd\theta dz.$$

Exempel 7 *Beräkna* $\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z} dxdydz$ *där* D *är området som begränsas av* $0 \le x+y, 0 \le x-y, 1 \le z \le 2$ *och* $x^2+y^2 \le 1$.

Lösning: Området är en del av en cylinder, och begränsas av enbart koordinatytor för cylindriska koordinater. Begränsningen $0 = x+y$ svarar mot $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $0 = x-y$ svarar mot $\theta = \frac{\pi}{4}$, och $x^2+y^2 \le 1$ säger att $r \le 1$.



Detta ger området $E = \{(r,\theta,z) : 0 \le r \le 1, -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 1 \le z \le 2\}$:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+z} dxdydz &= \iiint\limits_E \frac{1}{x^2+y^2+z} r dr d\theta dz \\
&= \int_1^2 (\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\int_0^1 \frac{1}{r^2+z} r dr) d\theta) dz \\
\{r\text{-integration}\} &= \int_1^2 (\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\frac{1}{2}\ln(r^2+z)]_{r=0}^{r=1} d\theta) dz \\
\{\text{insättning av gränser}\} &= \frac{1}{2}\int_1^2 (\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\ln(1+z) - \ln z) d\theta) dz \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 (\ln(1+z) - \ln z) dz \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}))[(z+1)\ln(z+1) - z\ln z]_{r=1}^{r=2} \\
&= \pi(3\ln 3 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + 1\ln 1) \\
&= \pi(3\ln 3 - 4\ln 2) \\
&= \pi \ln \frac{9}{8}.
\end{aligned}$$

Vi använde i sista integrationen att $\int \ln(x+a)dx = (x+a)\ln(x+a) - x + C$ med $a = 1$ och $a = 0$.