Nr 19, 3 maj -05, Amelia 2

19 Integralkurvor, potentialer och kurvintegraler i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$

19.1 Integralkurvor

En **integralkurva** $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ till ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$ är en kurva där vektorfältet är en tangent till kurvan i alla punkter som kurvan går genom. En kurva $(x, y(x))$, som är grafen till funktionen $y(x)$, har förstås lutningen $y'(x)$, och motsvarande lutning för en vektor $\mathbf{F}(x, y)$ är F_y/F_x Fältets riktning i en punkt kan givetvis beskrivas som denna lutning. Vi påminner om att derivatan av en funktion $f(x)$ är förändringen i y-led $(f(x+h) - f(x))$ dividerat med förändringen i x-led (h).

Med denna likhet mellan lutningar kan vi bestämma integralkurvorna till ett vektorfält $\mathbf{F}(x, y)$ genom att lösa differentialekvationen

$$y'(x) = \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Exempel 1 *Bestäm integralkurvorna till vektorfältet* $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.

Lösning: Här är $F_x = y$ och $F_y = -x$, så vi får differentialekvationen

$$y'(x) = \frac{-x}{y},$$

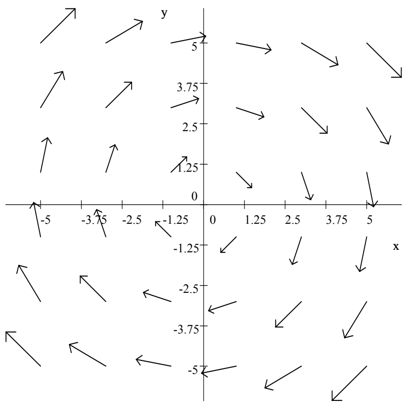
dvs

$$yy'(x) = -x.$$

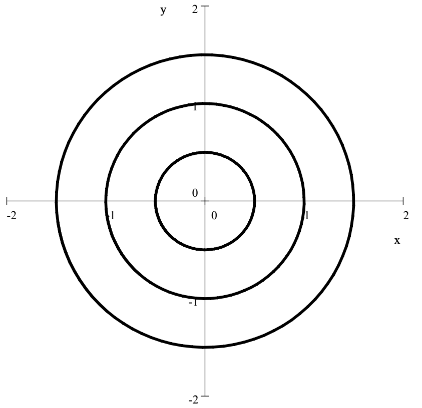
Denna ekvation är separabel, och vi får

$$\begin{aligned} \int y dy &= -\int x dx, \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C, \\ y^2 + x^2 &= 2C \end{aligned}$$

som för varje $C > 0$ är en cirkel. Integralkurvorna till vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ är således cirklar. Man kan se i följande figur att pilarna är tangenter till integralkurvorna (man får integralkurvorna genom att "binda ihop pilarna").



Vektorfältet $(y, -x)$.



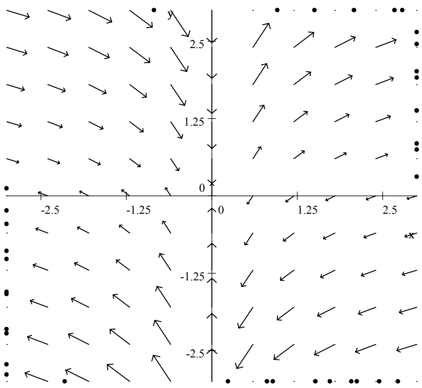
Integralkurvor till $(y, -x)$ är cirklar.

Svar: Integralkurvorna till $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ är cirklar $y^2 + x^2 = 2C$.

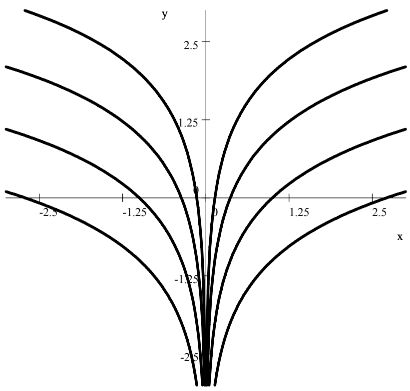
Exempel 2 *Bestäm integralkurvorna till vektorfältet* $\mathbf{F}(x, y) = (y, \frac{y}{x})$.

Lösning: Här får vi differentialekvationen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\frac{y}{x}}{y}, \\ y' &= \frac{1}{x}, \\ y &= \ln|x| + \ln C. \end{aligned}$$



Vektorfältet $(y, \frac{x}{y})$.



Integralkurvor $y = \ln|x| + C$.

Svar: vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (y, \frac{y}{x})$ har integralkurvorna $y = \ln|x| + C$.

19.1.1 Bevis av Greens formel

Vi har sett att Greens formel ofta är användbar som metod att beräkna en kurvintegral:

Sats 3 (Greens formel) *Om vektorfältet har kontinuerliga partiella derivator* P'_y *och* Q'_x *överallt i* D *innanför den enkla slutna orienterade kurvan* Γ *som genomlöps i positiv led och är rand till området* D*, så kan kurvintegralen beräknas som följande dubbelintegral:*

$$\int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy.$$

Som vi ska se härnäst kan Greens formel bevisas väsentligen genom upprepad integration av dubbelintegralen.

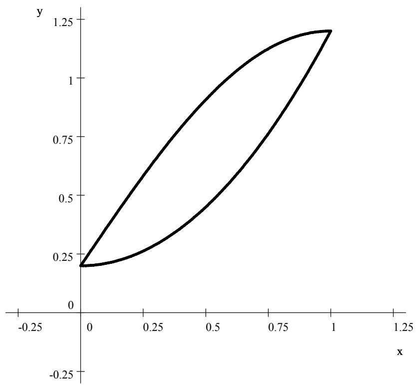
Bevis av Greens formel: Greens formel kan betraktas som två formler:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma P(x,y)dx &= -\iint_D P'_y dxdy \text{ och} \\ \int_\Gamma Q(x,y)dy &= \iint_D Q'_x dxdy. \end{aligned}$$

Addition av de två ger Greens formel. Vi kommer här att nöja oss med att visa den första

$$\int_\Gamma P(x,y)dx = -\iint_D P'_y dxdy$$

i fallet att området är $D = \{a \le x \le b, f(x) < y < g(x) \text{ då } a < x < b\}$ och $f(a) = g(a)$ samt $f(b) = g(b)$. Då får vi inga vertikala sidor: linjer $x = a$ och $y = b$.



Området $f(x) \le y \le g(x)$.

Då kan vi beräkna dubbelintegralen med itererad integration, genom att integrera i y-led först. Dessutom har vi då en primitiv funktion till integranden $P'_y(x,y)$, nämligen funktionen $P(x,y)$.. Vi får

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D P'_y dxdy &= \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} P'_y dy \\
&= \int_a^b [P(x,y)]_{f(x)}^{g(x)} dx \\
&= \int_a^b (P(x,g(x)) - P(x,f(x))dx.
\end{aligned}$$

Låt oss nu å andra sidan beräkna $\int_\Gamma P(x,y)dx$. Låt oss kalla den undre kurvan Γ_f och den övre Γ_g, så $\Gamma = \Gamma_f + \Gamma_g$. Vi får

$$\int_\Gamma P(x,y)dx = \int_{\Gamma_f} P(x,y)dx + \int_{\Gamma_g} P(x,y)dx.$$

Vi har parameterframställningarna $(t, f(t))$ och $(t, g(t))$ där t på Γ_f går från a till b. På Γ_g har vi omvänd riktning, dvs från b till a. Med detta val genomlöps kurvan Γ i positiv led, som ju föreskrivs i Greens formel.

Båda parameterframställningarna ger $dx = dt$, och vi får

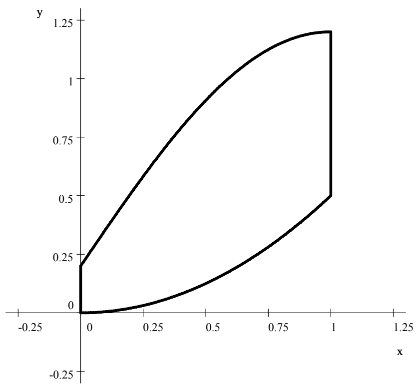
$$\begin{aligned}
\int_\Gamma P(x,y)dx &= \int_{\Gamma_f} P(x,y)dx + \int_{\Gamma_g} P(x,y)dx \\
&= \int_a^b P(t,f(t))dt + \int_b^a P(t,g(t))dt \\
\{\text{byt integrationsordning}\} &= \int_a^b P(t,f(t))dt - \int_a^b P(t,g(t))dt \\
\{\text{samma intervall - slå ihop}\} &= \int_a^b (P(t,f(t)) - P(t,g(t)))dt..
\end{aligned}$$

Jämförelse med $\iint\limits_D P'_y dxdy$ efter den itererade integrationen visar att $\iint\limits_D P'_y dxdy$ och $\int_\Gamma P(x,y)dx$ skiljer sig bara med tecknet, vilket är just vad

$$\int_\Gamma P(x,y)dx = -\iint\limits_D P'_y dxdy$$

säger.

Det är nu lätt att generalisera detta bevis något, genom att stryka villkoren $f(a) = g(a)$ och $f(b) = g(b)$. Då kan det också finnas vertikala begränsningskurvor.



Området $f(x) < y < g(x)$.

Dubbelintegrationen påverkas inte alls av detta. På dessa kurvor har vi parameterframställningarna (a, t) respektive (b, t), så vi får en vertikal tangentriktning: $x'(t) = (0, 1)$. Det betyder att $dx = x'(t)dt = 0dt = 0$, så $P(x, y)dx = 0$ på en vertikal linje. Vertikala linjer ger alltså inget bidrag till kurvintegralen heller.

19.2 Beräkning av potential

Vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

har en potential om det finns en funktion $U(x, y, z)$ så att

$$\begin{aligned} U'_x &= F_1, \\ U'_y &= F_2, \\ U'_z &= F_3. \end{aligned}$$

De tre likheterna kan skrivas som en vektorlikhet:

$$\text{grad } U = \mathbf{F}.$$

Ett fält som har potential kallas en konservativt fält. Om $\mathbf{F}$ har en potential (är konservativt), och denna är känd, kan en kurvintegral av $\mathbf{F}$ beräknas på enklast möjliga sätt:

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{U}(\text{kurvans slutpunkt}) - \mathbf{U}(\text{kurvans startpunkt}),$$

eller alltså (eftersom grad $U = \mathbf{F}$)

$$\int_\Gamma \text{grad}U \cdot \mathbf{dr} = \mathbf{U}(\text{kurvans slutpunkt}) - \mathbf{U}(\text{kurvans startpunkt}).$$

Detta är möjligt på grund av att kurvintegralen av ett konservativt fält är oberoende av vägen. Då är den endast beroende av start- och slutpunkt.

Exempel 4 *(1125) Bestäm konstanten a så att* $\mathbf{F} = (y+2z, x+2z, ax+2y)$ *har en potential. Beräkna integralen* $.\int_\Gamma gradf \cdot d\mathbf{r}$ *där* Γ *är skruvlinjen* $(\cos t, \sin t, 3t)$, *från* $(1,0,0)$ *till* $(1,0,6\pi)$.

Lösning: Vi har tre villkor på potentialen U :

$$\begin{aligned} U'_x &= y+2z, \\ U'_y &= x+2z, \\ U'_z &= ax+2y. \end{aligned}$$

Från den första ekvationen får vi genom x-integration

$$U = xy + 2xz + f(y,z),$$

där $f(y,z)$ är en ur x-integrationen uppkommen "konstant" (m.a.p. x). Derivering av U m.a.p. y och jämförelse med den andra ekvationen ger ett villkor på f :

$$U'_y = x + 0 + f'_y(y,z) = \{\text{andra ekv.}\} = x + 2z.$$

Vi måste alltså ha $f'_y(y,z) = 2z$. Det ger $f(y,z) = 2yz$, alltså

$$U = xy + 2xz + 2yz.$$

Derivering m.a.p. z och kontroll med den tredje ekvationen ger nu

$$U'_z = 0 + 2x + 2y = \{\text{tredje ekv.}\} = ax + 2y.$$

Denna gäller endast om $a = 2$. Då är fältet konservativt med potentialen

$$U = xy + 2xz + 2yz.$$

Vi väljer alltså enligt uppgiften $a = 2$. Kurvintegralen blir då

$$\begin{aligned} \int_\Gamma gradf \cdot d\mathbf{r} &= U(1,0,6\pi) - U(1,0,0) \\ &= 12\pi - 0 = 12\pi. \end{aligned}$$

Svar: $a = 2$, $\int_\Gamma gradf \cdot d\mathbf{r} = 12\pi$.

19.3 Kurvintegraler i planet med Greens formel eller potential

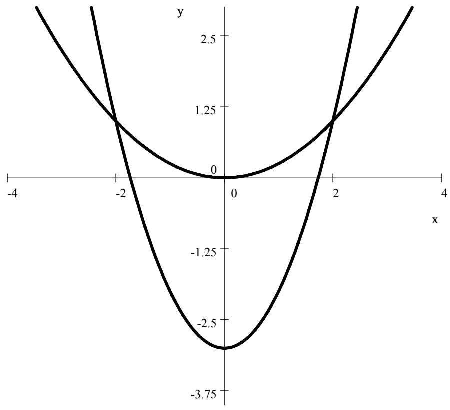
Exempel 5 *(1019) Beräkna* $\oint_\Gamma (e^x \cos x - y)dx + (2xy + \arctan y^2)dy$ *i positiv led längs randen till området* $x^2 - 3 \le y \le \frac{1}{4}x^2$.

Lösning: Här är $\mathbf{F}(x, y = (P(x,y), Q(x,y)) = (e^x \cos x - y, 2xy + \arctan y^2)$. Termen $\arctan y^2$ ser besvärlig ut att integrera, vilket är ett tecken på att Greens formel bör användas. Där deriveras också fältets y-komponent $(Q(x,y))$ m.a.p.

x, ty i Greens formel är integranden $Q'_x - P'_y$, så vi kommer att få $\frac{\partial}{\partial x} \arctan y^2 = 0$. Detta problem försvinner. Vi får

$$\begin{aligned} Q'_x - P'_y &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy + \arctan y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos x - y) \\ &= 2y + 0 - (0 - 1) = 2y + 1. \end{aligned}$$

Kurvan är sluten vilket också underlättar med tanke på Greens formel – vi behöver inte lägga till någon kurva för att göra den sluten.



Integrationsområdet D.

I dubbeintegralen har vi gränserna i y enligt $x^2 - 3 \le y \le \frac{1}{4}x^2$. De två kurvorna skär varandra då $x^2 - 3 = \frac{1}{4}x^2$, dvs $x^2 = 4$, så $x = \pm 2$. Greens formel ger nu

$$\begin{aligned} &\oint_\Gamma (e^x \cos x - y)dx + \\ (2xy + \arctan y^2)dy &= \iint_D (2y+1)dxdy \\ &= \int_{-2}^{2} dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2-3} (2y+1)dy \\ &= \int_{-2}^{2} (y^2 + y)]_{\frac{1}{4}x^2}^{x^2-3} dx \\ &= \int_{-2}^{2} ((x^2-3)^2 + (x^2-3) - (\frac{1}{4}x^2)^2 - \frac{1}{4}x^2)dx \\ &= \int_{-2}^{2} (\frac{15}{16}x^4 - \frac{21}{4}x^2 + 6)dx \\ &= 2[\frac{3}{16}x^5 - \frac{7}{4}x^3 + 6x]_0^2 \\ &= 2(\frac{3}{16}x^5 - \frac{7}{4}x^3 + 6) = 8. \end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\oint_\Gamma (e^x \cos x - y)dx + (2xy + \arctan y^2)dy = 8.$

Exempel 6 *(1015) Beräkna* $\int_\Gamma \frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^2}$ *längs en halvcirkelbåge i första kvadranten från* $(0,0)$ *till* $(1,1)$.

Lösning: Man kan försöka räkna ut var centrum för denna kvartscirkel är, men det behöver man inte om man finner att fältet är konservativt. Fältet är inte definierat då $1 + xy = 0$, dvs $y = -\frac{1}{x}$. Så vi måste hålla oss borta från denna kurva.

Låt oss prova att räkna ut en potential. Då ska de två ekvationerna

$$\begin{aligned} U'_x &= P \\ U'_y &= Q \end{aligned}$$

gälla för någon funktion $U(x,y)$. Går det inte att lösa ekvationerna så finns det ingen potential, dvs fältet är inte konservativt.

Vi har vektorfältet $\mathbf{F}(x, y = (P(x,y), Q(x,y)) = (\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}, \frac{1-x^2}{(1+xy)^2})$, och den första relationen $U'_x = P$ ger

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}, \text{ så} \\ U &= \int \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} dx = -\frac{1}{y}\frac{1-y^2}{1+xy} + f(y) \\ &= (y - \frac{1}{y})\frac{1}{1+xy} + f(y). \end{aligned}$$

När vi integrerar variabeln x får vi en "konstant (m.a.p. x)" $f(y)$, som givetvis kan vara beroende av den andra variabeln y. Deriverar vi högerledet m.a.p. x så försvinner $f(y)$, och vi får tillbaka integranden $\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$ igen.

Om denna funktion uppfyller $U'_y = Q$ så är fältet konservativt. Dvs, vi deriverar m.a.p. y :

$$\begin{aligned} U'_y &= \frac{\partial}{\partial y}((y - \frac{1}{y})\frac{1}{1+xy} + f(y)) \\ &= (1 + \frac{1}{y^2})\frac{1}{1+xy} - (y - \frac{1}{y})\frac{x}{(1+xy)^2} + f'(y) \\ &= (1 + \frac{1}{y^2} + 2\frac{x}{y})\frac{1}{(1+xy)^2} + f'(y) \\ &= \frac{y^2 + 2xy + 1}{y^2(1+xy)^2} + f'(y) \\ &= \frac{y^2 + 2xy + 1}{y^2(1+xy)^2} + f'(y) = \{\text{krav för potential}\} \\ &= Q(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+xy)^2}. \end{aligned}$$

: $(xy+1)^{-2}\, y^{-2}\left(2xy+y^2+1\right)$
Kan vi välja $f(y)$ så detta går ihop? Vi får

$$\begin{aligned}
f'(y) &= \frac{1-x^2}{(1+xy)^2} - \frac{y^2+2xy+1}{y^2(1+xy)^2} \\
&= \frac{y^2-y^2x^2-y^2-2xy-1}{y^2(1+xy)^2} \\
&= -\frac{y^2x^2+2xy+1}{y^2(1+xy)^2} = -\frac{(yx+1)^2}{y^2(1+xy)^2} \\
\{\text{förkorta!!}\} &= -\frac{1}{y^2}.
\end{aligned}$$

Vi fick något som blev oberoende av x. Alltså kan vi bestämma $f(y)$, vilket betyder att potentialen existerar (dvs att fältet är konservativt). Kravet $f'(y) = -\frac{1}{y^2}$ ger $f(y) = \frac{1}{y}$, så en potential är

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= (y-\frac{1}{y})\frac{1}{1+xy} + \frac{1}{y} \\
&= \frac{x+y}{1+xy}.
\end{aligned}$$

Det var i detta fall en lång kalkyl att beräkna potentialen (och samtidigt avgöra om den finns). Fördelen med att bestämma en potental är att man då inte behöver göra någon integration alls. Analogt med en primitiv funktion för en enkelintegral ($\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$) har vi nämligen att

$$\int_\Gamma \frac{(1-y^2)dx + (1-x^2)dy}{(1+xy)^2} = U(1,1) - U(0,0),$$

eftersom Γ går från $(0,0)$ till $(1,1)$, om potentialen är definierad längs hela kurvan. Så är fallet om vi inte passerar den kurva där nämnaren är noll, som är $y = -\frac{1}{x}$. Vi får då att

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{(1-y^2)dx + (1-x^2)dy}{(1+xy)^2} &= U(1,1) - U(0,0) \\
\{\text{insättning av } \frac{x+y}{1+xy}\} &= \frac{1+1}{1+1\cdot 1} - \frac{0+0}{1+0} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Svar: $\int_\Gamma \frac{(1-y^2)dx+(1-x^2)dy}{(1+xy)^2} = 1.$

19.4 Kurvintegraler i rummet

Om $\mathbf{F}$ är ett tredimensionellt vektorfält, som dessutom beror av tre variabler x, y och z, så har vi

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

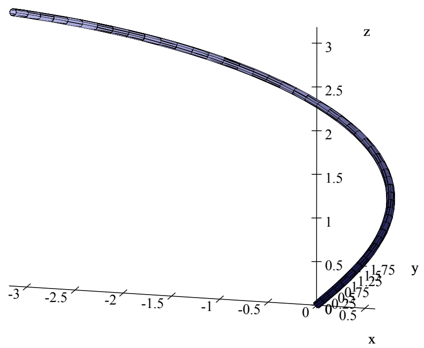
Om Γ är en kurva i rummet med parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, t från a till b, så är kurvintegralen definierad som enkelintegralen

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

där $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Exempel 7 *(1120) Beräkna* $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz$ *där* Γ *är kurvan* $(t\cos t, t\sin t, t)$ *från* $(0, 0, 0)$ *till* $(\pi, 0, -\pi)$.

Lösning: Vi har vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, z)$. Här är kurvan redan given genom en parameterframställning. Punkterna $(0, 0, 0)$ och $(\pi, 0, -\pi)$ svarar mot värdena $t = 0$ och $t = \pi$. Kurvan är en spiralkurva på ytan av en kon:



Parameterframställningen $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ ger tangenten $\mathbf{r}'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$. Värdena för vektorfältet $\mathbf{F} = (x, y, z)$ på kurvan $(t\cos t, t\sin t, t)$ fås genom att sätta in $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ och $z = t$.

$$\mathbf{F} = (x, y, z) = (t\cos t, t\sin t, t).$$

Kurvintegralens integrand $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$ är då här

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= (t\cos t, t\sin t, t) \cdot (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1) \\ &= t\cos^2 t - t^2 \cos t \sin t + t\sin^2 t + t^2 \cos t \sin t + t \\ \{\text{en trigonometrisk etta}\} &= 2t. \end{aligned}$$

Kurvintegralen är då

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^\pi 2t dt \\ &= \left[t^2\right]_0^\pi = \pi^2. \end{aligned}$$

Svar: $\int_\Gamma xdx + ydy + zdz = \pi^2$.

Exempel 8 *(1123) Låt $f(x, y, z) = (x + 2) \ln \sqrt{\frac{y+3}{z+4}}$. Beräkna $\int_\Gamma grad f \cdot d\mathbf{r}$ där Γ är räta linjen från $(0, 1, 0)$ till $(1, 1, 2)$ och därifrån räta linjen till $(1, 0, 0)$.*

Lösning: Här är f en potential till grad f. Så $\int_\Gamma$grad $f \cdot \mathbf{dr}$ är oberoende av vägen, och

$$\int_\Gamma \text{grad } f \cdot \mathbf{dr} = f(\text{slutpunkt}) - f(\text{startpunkt})$$

om vi är inom det område där f är definierad. Så är fallet om $\frac{y+3}{z+4} > 0$. Vi har inga problem om $y > -3$ och $z > -4$. Så är fallet för hela kurvan, där $y \geq 0$ och $z \geq 0$.

Vi får då

$$\begin{aligned} \int_\Gamma grad f \cdot d\mathbf{r} &= \left[(x + 2) \ln \sqrt{\frac{y+3}{z+4}}\right]_{(1,0,0)} - \left[(x + 2) \ln \sqrt{\frac{y+3}{z+4}}\right]_{(0,1,0)} \\ &= 3 \ln \sqrt{\frac{3}{4}} - 2 \ln \sqrt{\frac{4}{4}} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Svar: $\int_\Gamma$grad $f \cdot \mathbf{dr} = \frac{3}{2} \ln \frac{3}{4}$.