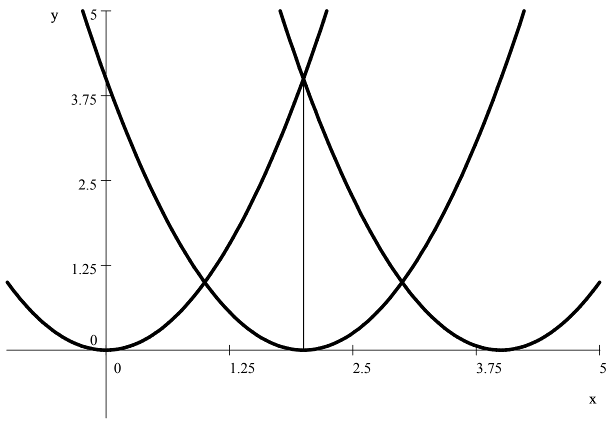
Nr 11, 11 april -05, Amelia 2

11 Dubbelintegraler: itererad integration och variabelsubstitution

11.1 Itererad integration – ytterligare exempel

Exempel 1 *(907k) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{1}{(y-x^2-8)^2} dxdy$ *om* D *begränsas av* $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ *och* $y = (x-4)^2$.



Område begränsat av $y = x^2$, $y = (x-2)^2$ *och* $y = (x-4)^2$.

Lösning: Kurvorna $y = x^2$ och $y = (x-2)^2$ skär varandra i $x^2 = (x-2)^2$. Det ger $x^2 = x^2 - 4x + 4$, dvs $x = 1$. På liknande sätt skär $y = (x-2)^2$ och $y = (x-4)^2$ varandra i $x = 3$. Så x ska gå mellan $x = 1$ och $x = 3$.

Kurvorna $y = x^2$ och $y = (x-4)^2$ skär varandra i punkten $(2, 4)$. Vi delar då integrationsområdet i linjen $x = 2$. Sätt $D_1 = \{1 \leq x \leq 2, (x-2)^2 \leq y \leq x^2\}$ (vänstra området) och $D_2 = \{2 \leq x \leq 3, (x-2)^2 \leq y \leq (x-4)^2\}$ (högra området). Vi kan alltså dela upp integrationen i två delar

$$\iint\limits_D \frac{1}{(y-x^2-8)^2} dxdy = \iint\limits_{D_1} \frac{1}{(y-x^2-8)^2} dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{1}{(y-x^2-8)^2} dxdy.$$

Låt oss integrera över D_1 först.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_1} \frac{1}{(y-x^2-8)^2}dxdy &= \int_1^2 dx \int_{(x-2)^2}^{x^2} \frac{1}{(y-x^2-8)^2}dy \\
&= \int_1^2 [-\frac{1}{y-x^2-8}]_{(x-2)^2}^{x^2} dx \\
&= \int_1^2 (\frac{1}{8}+\frac{1}{-4x+4-8})dx \\
&= \int_1^2 (\frac{1}{8}-\frac{1}{4x+4})dx \\
&= [\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}\ln(x+1)]_1^2 \\
&= \frac{1}{8}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{4}\ln 2.
\end{aligned}$$

På liknande sätt får vi

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2} \frac{1}{(y-x^2-8)^2}dxdy &= \int_2^3 dx \int_{(x-2)^2}^{(x-4)^2} \frac{1}{(y-x^2-8)^2}dy \\
&= \int_2^3 [-\frac{1}{y-x^2-8}]_{(x-2)^2}^{(x-4)^2} dx \\
&= \int_2^3 (-\frac{1}{-8x+16-8}-\frac{1}{4x+4})dx \\
&= [\frac{1}{8}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x+1)]_2^3 \\
&= \frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 4-\frac{1}{8}\ln 1+\frac{1}{4}\ln 3.
\end{aligned}$$

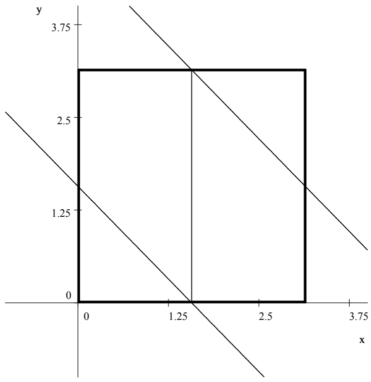
Vi får att

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} \frac{1}{(y-x^2-8)}dxdy &= \iint\limits_{D_1} \frac{1}{(y-x^2-8)}dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{1}{(y-x^2-8)}dxdy \\
&= \frac{1}{8}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{4}\ln 2+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\ln 4+\frac{1}{4}\ln 3 \\
&= \frac{1}{8}(1-\ln 2).
\end{aligned}$$

Svar: $\frac{1}{8}(1-\ln 2)$.

Exempel 2 *(908e) Beräkna* $\iint\limits_D |\cos(x+y)|dxdy$ *om* D *är kvadraten* $\{0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$.

Lösning: För att lättare integrera tar vi bort absolutbeloppet. Vi har att $\cos(x+y) \geq 0$ om $x+y \leq \frac{\pi}{2}$ och om $x+y \geq \frac{3\pi}{2}$ annats (i D) är $\cos(x+y) < 0$, så om $\frac{\pi}{2} < x+y < \frac{3\pi}{2}$ gäller att $|\cos(x+y)| = -\cos(x+y)$.



Vi klyver området i $x = \pi/2$. Symmetrin ger att

$$\iint\limits_{D} |\cos(x+y)|dxdy = 2 \iint\limits_{D_{\text{vänster}}} |\cos(x+y)|dxdy.$$

Vi delar $D_{\text{vänster}}$ i två delar: under $x+y = \frac{\pi}{2}$ och över.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} |\cos(x+y)|dxdy &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} (\cos(x+y))dxdy \\
&\quad +2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} (-\cos(x+y))dxdy \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}-x} dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)]_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\frac{\pi}{2} - \sin x)dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x+\pi) - \sin\frac{\pi}{2})dx \\
&= 2[x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2[\cos x - x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2(\frac{\pi}{2} - 1) - 2(-\frac{\pi}{2} - 1) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Svar: π.

11.2 Metoder för enkelintegraler

För enkelintegraler finns två huvudmetoder för att bestämma en primitiv funktion: partialintegration och variabelsubstitution. Med analysens huvudsats (integration är omvänd derivering) kan de två metoderna lätt härledas från derivering av produkt respektive kedjeregeln.

11.2.1 Partialintegration

Vid partialintegration betraktar man integranden som en produkt av två funktioner $f(x)g(x)$ och får en ny integral med integrand $F(x)g'(x)$ som ska vara lättare att integrera om det ska vara någon poäng med partialintegrationen. Här är $F(x)$ en primtiviv funktion till $f(x)$ och $g'(x)$ derivatan av $g(x)$. Här är formeln:

$$\text{Partialintegration:} \quad \int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Man får alltså en "untintegrerad term" $F(x)g(x)$ också. Som exempel kan en integral som x^3e^{2x} beräknas genom att partialintegrera tre gånger, och varje gång integrera faktorn e^{2x} och derivera polynomet som är en faktor till e^{2x}. När polynomet är en konstant har vi integranden Ce^{2x} som har primitiv funktion $\frac{C}{2}e^{2x}$, och integrationen är klar. Att partialintegrera genom att derivera e^{2x} och integrera x^3 är korrekt men poänglöst för man kommer inte närmare en standardintegral (som $\int e^{2x}dx$). Det finns många omskrivningar som är felfria men meningslösa.

Integralen $\int e^x \cos x dx$ kan beräknas genom att partialintegrera två gånger. Då återkommer samma integral i högerledet med minustecken, varför den kan slås ihop med den ursprungliga integralen genom att flytta den till vänsterledet, och integrationen är klar.

Ännu ett sätt att använda partialintegration är för att beräkna $\int \ln x dx$. Här betraktar vi integranden som en produkt genom $\ln x = 1 \cdot \ln x$ och integrerar 1:an och deriverar $\ln x$. Det ger en lätt integral.

Partialintegration är en integrationformulering av derivering av produkt. Deriveringa av produkt skriver vi här med notation som stämmer överens med formuleringen av partialintegration ovan (använd $F'(x) = f(x)$):

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = f(x)g(x) + F(x)g'(x).$$

Genom att derivera partialintegrationslikheten fås genast denna formel för derivering av produkt.

11.2.2 Variabelsubstitution

Den andra metoden är variabelsubstitution, som kommer direkt från kedjeregeln:

$$\frac{d}{dx}f(y(x)) = f(y(x))y'(x).$$

För att bestämma primitiv funktion måste substitutionen $y(x)$ vara deriverbar och inverterbar (i det intervall vi är intresserade av – oftast räcker det med att det finns något intervall, dvs y är inte konstant). Substitutionen kan som lösningmetod formuleras i två versioner, som matematiskt är helt ekvivalenta:

$$\text{Variabelsubstitution, version 1:} \quad \int f(x)y'(x)dx = \int f(y)dy.$$

$$\text{Variabelsubstitution, version 2:} \quad \int f(x)dx = \int f(y)x'(y)dy.$$

Notera att $y'(x)dx = dy$ och $x'(y)dy = dx$. Vi kan använda båda eftersom $y(x)$ är inverterbar – även $x(y)$ är väldefinierad. I verison 1 kan man från början se en inre derivata i integranden, som i integralen

$$\int e^{x^2} 2x dx$$

där $2x$ är derivatan av x^2 – alltså inre derivatan vid derivation av e^{x^2}. Sätter man $y = x^2$ får man då

$$\int e^{x^2} 2x dx = \int e^y dy$$

som är en standardintegral:

$$\int e^{x^2} 2x dx = \int e^y dy = e^y + C = e^{x^2} + C.$$

I sista ledet substituerade vi tillbaka x.

I version 2 finns det ingen möjlighet att se en inre derivata i integranden. Man får prova en substitution med ledning av integrandens typ och med erfarenhet av integrationskalkyler. Ett exempel är

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Sätter man $e^x = y$, alltså $x = \ln y$, fås här $dx = \frac{1}{y} dy$, och vi får en standardintegral:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{y + \frac{1}{y}} \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{y^2 + 1} dy \\ \{\text{standardintegral!}\} &= \arctan y + C = \arctan e^x + C. \end{aligned}$$

11.2.3 Variabelsubstitution i en bestämd integral

Vid variabelsubstitution i en bestämd integral transformeras även gränserna:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{y(a)}^{y(b)} f(y)x'(y)dy.$$

Variabelsustitutionen $x(y)$ är inverterbar och deriverbar. Deriverbarheten implicerar kontinuitet, vilket tillsammans med inverterbarhet betyder att funktionen $x(y)$ är antingen växande eller avtagande. Om den är en avtagande funktion $x(y)$ gäller förstås att $x'(y) < 0$, och att undre gränsen $y^{-1}(a) > y^{-1}(b)$, där

$y^{-1}(b)$ är övre gränsen. Vi kan skriva integralen på så sätt att undre gränsen är mindre än övre gränsen genom att byta riktning på integrationen, vilket ger ett minustecken. Detta kan flyttas in till $x'(y)$.

$$\begin{aligned}\int_{y^{-1}(a)}^{y^{-1}(b)} f(y)x'(y)dy &= -\int_{y(b)}^{y(a)} f(y)x'(y)dy \\ &= .\int_{y(b)}^{y(a)} f(y)(-x'(y))dy\end{aligned}$$

Eftersom $x'(y) < 0$ har vi då $-x'(y) = |x'(y)|$.

I det andra fallet, när $x(y)$ är växande, är $x'(y) > 0$, så då gäller $x'(y) = |x'(y)|$. Man kan alltså skriva variabelsubstitutionen med absolutbelopp:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\min(y(a),y(b))}^{\max(y(a),y(b))} f(y)|x'(y)|dy,$$

och så att den undre gränsen alltid är mindre än den övre. Detta passar bra för dubbelintegraler, ty i dess definition med itererad integration är båda enkelintegralerna sådana att undre gränsen alltid är mindre än den övre.

Notera att funktionen $|x'(y)|$ anger transformationens (från y till $x(y)$) lokala längdförstoring i punkten y. Ty ett litet intervall $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, med längd 2ε, avbildas på ett intervall $(x(y-\varepsilon), x(y+\varepsilon))$, vars längd är $|x(y+\varepsilon) - x(y-\varepsilon)|$. Relativa längdförstoringen är alltså

$$\frac{|x(y+\varepsilon) - x(y-\varepsilon)|.}{2\varepsilon},$$

som är mycket nära $|x'(y)|$ om ε är tillräckligt litet, enligt definitionen på derivata och deriverbarhet för $x(y)$.

11.3 Dubbelintegraler

För att beräkna en dubbelintegral finns det också två huvudmetoder: itererad integration och variabelsubstitution. Itererad integration ger som vi sett två enkelintegraler, där alla metoder för enkelintegraler givetvis kan användas. Det finns för dubbelintegraler inte någon motsvarighet till partialintegration. Däremot finns en genuint tvådimensionell variabelsubstitution.

Om $(x(s,t), y(s,t))$ är en inverterbar avbildning så är dess jacobian följande matris av förstaderivator, som vi har (minst) tre skrivsätt för:

$$\begin{pmatrix} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_s \end{pmatrix} = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = J(s,t).$$

Determinanten av jacobianen kallas **funktionaldeterminanten**:

$$\begin{pmatrix} x'_s & x'_t \\ y'_s & y'_{sa} \end{pmatrix},$$

och beskriver den lokala ytförstoringen.

Sats 3 *Antag att $(x(s,t), y(s,t))$ är en inverterbar avbildning från integrationsområdet D till ett område E. Då gäller*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(s,t), y(s,t))|J(s,t)|dsdt.$$

Vi får i integranden absolutbeloppet av den lokala ytförstoringen ($|J(s,t)|$), på liknande sätt som vi för en enkelintegral fick absolutbeloppet av den lokala längdförstoringen som en faktor i integranden.

Bevis: En term i en Riemannsumma är rätblockvolymen

$$f(x_i, y_j)A(x_i, x_{i+1}, y_j, y_{j+1}).$$

Här är $A(x_i, x_{i+1}y_j, y_{j+1})$ arean av rektangeln med hörn i $(x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ och (x_{i+1}, y_j). Betrakta en variabelsubstitution $(s,t) \to (x(s,t), y(s,t))$, eller $(x,y) \to (s(x,y), t(x,t))$ som är en inverterbar avbildning utom på en nollmängd. Punkterna $(x_i, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_{j+1})$ och (x_{i+1}, y_1) svarar mot $(s_i, t_j), (s_i, t_{j+1}), (s_{i+1}, t_{j+1})$ och (s_{i+1}, t_j), som har area $A(s_i, s_{i+1}t_j, t_{j+1})$. Det är klart att

$$A(x_i, x_{i+1}y_j, y_{j+1}) \neq A(s_i, s_{i+1}, t_j, t_{j+1})$$

i allmänhet, avbildningen kan till stor del ändra volymen. Men eftersom den lokala ytförstoringen är $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}|$, så kan man vänta sig att

$$A(x_i, x_{i+1}y_j, y_{j+1}) \approx |\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}|A(s_i, s_{i+1}, t_j, t_{j+1}),$$

med större överensstämmelse ju finare indelningen är, om f är integrerbar.

I motsvarande punkt har givetvis f samma värde:

$$f(x_i, y_j) = f(x(s_i, t_j), y(s_i, t_j)).$$

Vi betecknar $f(x(s_i, t_j), y(s_i, t_j))$ kortare med $f(s_i, t_j)$. Multiplicera med det lokala värdet av f, så får vi

$$f(x_i, y_j)A(x_i, x_{i+1}y_j, y_{j+1}) \approx f(s_i, t_j)|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}|A(s_i, s_{i+1}, t_j, t_{j+1}).$$

Om vi nu summerar över D respektive E så fås Riemannsummor som konvergerar mot påståendet i satsen.

Den viktigaste variabelsubstitutionen är polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

Dess funktionaldeterminant är lätt att beräkna:

$$
\begin{aligned}
|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}| &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta \\
&= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.
\end{aligned}
$$

Detta betyder att

$$dxdy = rdrd\theta$$

vid en variabelsubstitution. Detta är likheten

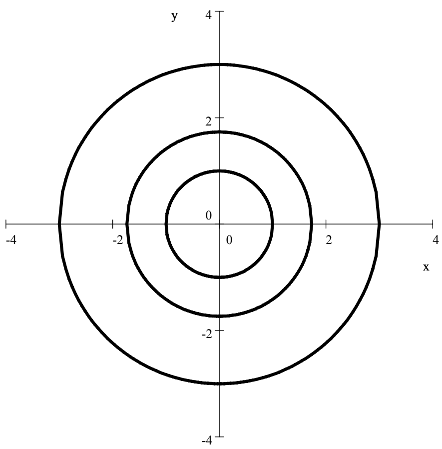
$$A(x_i, x_{i+1}y_j, y_{j+1}) \approx |\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}| A(r_i, r_{i+1}, \theta_j, \theta_{j+1})$$

ovan, när vi låter indelningens finhet gå mot noll.

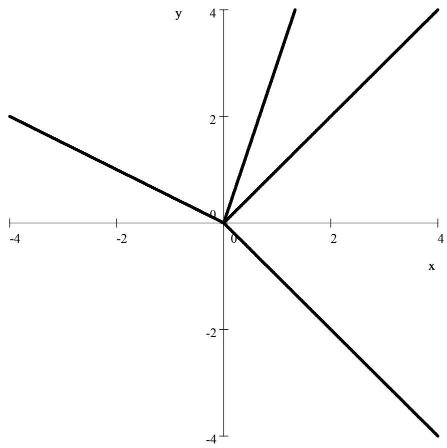
När är polära koordinater lämplig? Som för alla variabelsubstitutioner beror detta på två faktorer: integranden och området.

1. Variabelsubstitutionen förenklar integranden. För polära koordinater blir den ofta enklare om den exempelvis innehåller $x^2 + y^2$, som ju är r^2.
2. Variabelsubstitutionen förenklar integrationsområdet. Så är fallet om det består av koordinatkurvor för substitutionen, nämligen kurvor av typen $s =$ konstant och $t =$ konstant.

För polära koordinater är koordintatkurvorna som följer:



$r =$ konstant – cirklar runt origo

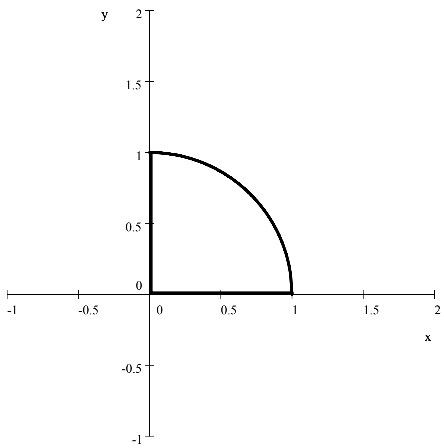


$r =$ konstant – strålar från origo

Exempel 4 *(919a) Beräkna* $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$ *där* $D = \{x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Lösning: Här är polära koordinater mycket lämpliga, ty området begränsas av koordinatkurvor och integranden blir

$$\sqrt{x^2+y^2}dxdy = rrdrd\theta = r^2drd\theta.$$



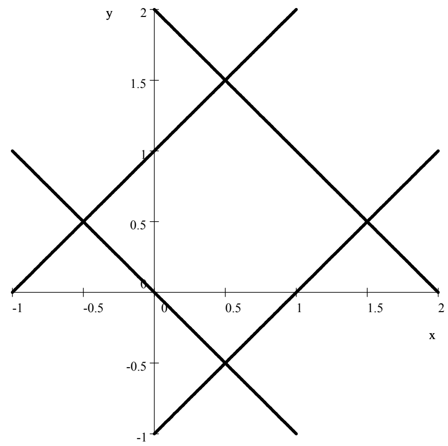
Integrationsområdet D.

Begränsningskurvorna transformeras som följer: $x^2+y^2 \leq 1$ ger $r \leq 1$, $x \geq 0$ ger $\theta \geq 0$ och $y \geq 0$ ger $\theta \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \iint\limits_{\{0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\}} r^2drd\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2drd\theta \\
\{\text{dela i två enkelintgraler!}\} &= \int_0^1 r^2dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{\pi}{6}$.

Exempel 5 *(920a) Beräkna* $\iint\limits_D \frac{x+y}{2+x-y}dxdy$ *där* $D = \{0 \leq x+y \leq 2, -1 \leq x-y \leq 1\}$.



Integrationsområdet D begränsas av räta linjer.

Lösning: Här kan substitutionen

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$$

förenkla både integrand och område. Vi får nämligen

$$\frac{x+y}{2+x-y} = \frac{u}{2+v}$$

och området $E = D = \{0 \le u \le 2, -1 \le v \le 1\}$. Vi får konstanta gränser, vilket är de enklaste gränser vi kan ha i en dubbelintegral.

Men vad är funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$? I detta fall gavs u och v i termer av x och y, i t.ex. fallet polära koordinater var det tvärtom. Men

$$|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}| = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2,$$

och

$$|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}|} = -\frac{1}{2}.$$

(Man kan också i detta fall lätt lösa ut x och y som funktioner av u och v. Det ger $\begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$.)

Så vi får integralen

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{x+y}{2+x-y}dxdy &= \int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{u}{2+v}dudv \\
&= \int_0^2 udu \int_{-1}^1 \frac{1}{2+v}dv \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 [\ln|2+v|]_{-1}^1 \\
&= 2(\ln 3 - \ln 1) = 2\ln 3.
\end{aligned}$$

Svar: $\iint\limits_D \frac{x+y}{2+x-y}dxdy = 2\ln 3.$

Vi har i två problem fått en produkt av enkelintegraler. Det går bra om integranden är en produkt av två funktioner vilka är beroende av den ena variabeln enbart ($f(x,y) = h(x)\cdot g(y)$), och gränserna är konstanta.

Sats 6 *Om $f(x,y) = h(x)g(y)$ och $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$, så*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b h(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy.$$

Bevis: Vi får

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int_a^b (\int_c^d h(x)g(y)dx)dy = \{g(y) \text{ är en konstant} \\
\text{i } x\text{-integrationen}\} &= \int_a^b g(y)(\int_c^d h(x)dx)dy = \{\int_c^d h(x)dx \text{ är en konstant} \\
\text{i } y\text{-integrationen}\} &= \int_a^b h(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy.
\end{aligned}$$

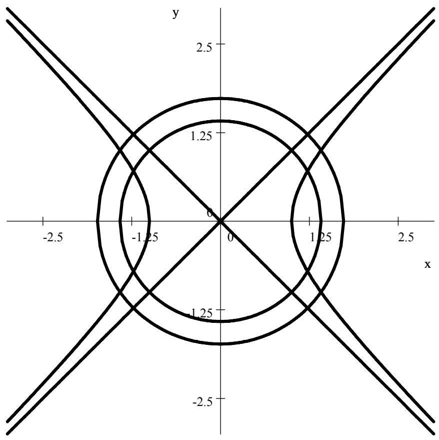
Beviset bygger alltså på räkneregeln

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

för enkelintegraler.

Exempel 7 *(921r) Beräkna* $\iint\limits_D (x^4 - y^4)dxdy$ *där* $D = \{0 \le x^2 - y^2 \le 1, 2 \le x^2 + y^2 \le 3\}$.

Lösning: Notera att $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ enligt konjugeringsregeln, och området också begränsas av kurvorna $x^2 - y^2 =$ konstant och $x^2 + y^2 =$ konstant. Området är mellan två cirkelbågar med radier $\sqrt{2}$ och $\sqrt{3}$, och mellan $y = \pm x$ och hyperbeln $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$.

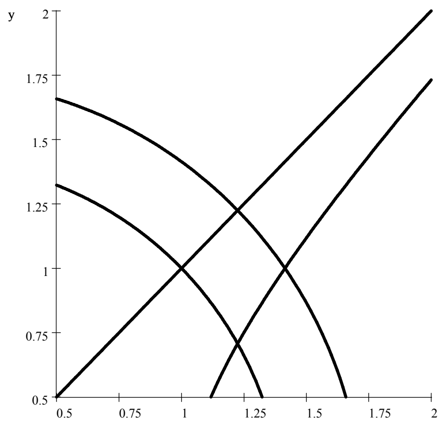


Integrationsområdet D bestör av fyra delar.

Vi får fyra bitar som svarar mot de fyra möjliga teckenändringarna i en punkt (x, y). Men integranden $x^4 - y^4$ är okänslig för tecken, så vi får 4 gånger integralen över en bit. Vi får då

$$\iint_D (x^4 - y^4)dxdy = 4\iint_{D_1} (x^4 - y^4)dxdy$$

där $D_1 = \{0 \leq x^2 - y^2 \leq 1, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$



Integrationsområdet D_1.

Sätt nu

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}.$$

Vi får

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -4xy - 4xy = -8xy.$$

Men

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 \\ &= 4x^2y^2. \end{aligned}$$

Så $8xy = 4\sqrt{u^2 - v^2}$, och

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}.$$

Således är

$$dxdy = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}dudv$$

och $x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = uv$. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_D (x^4-y^4)dxdy &= 4\int_2^3 \int_0^1 uv\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}}dudv \\ &= \int_2^3 du \int_0^1 u[-\frac{1}{2}\sqrt{u^2-v^2}]_0^1 dv \\ &= -\frac{1}{2}\int_2^3 (u\sqrt{u^2-1} - u^2)du \\ &= -\frac{1}{2}[\frac{1}{3}(u^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{u^3}{3}]_2^3 \\ &= -\frac{1}{6}[8^{\frac{3}{2}} - 27 - 3^{\frac{3}{2}} + 8] \\ &= \frac{1}{6}(19 + 16\sqrt{2} - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Svar: $\iint_D (x^4-y^4)dxdy = \frac{1}{6}(19+16\sqrt{2}-3\sqrt{3})$.